

RELATIVITÀ SPECIALE

Gianluca Arrighi[♣], Patrizia Caccia[♡], Alberto Ghioni[♣], Roberto Squellati[◇]
SILSIS-MI – V Ciclo – Anno Accademico 2003/04

29 ottobre 2005

Sommario

Anche limitandosi alla relatività ristretta, l'argomento è molto vasto e, per una trattazione esaustiva, occorrerebbe dedicare un tempo generalmente non disponibile nella normale programmazione curricolare di una scuola secondaria. A nostro avviso qualunque scelta di taglio deve comunque comprendere, come contenuti minimi:

- la *relativizzazione della simultaneità* e il *tempo locale*,
- le *trasformazioni di Lorentz*,
- la *dilatazione dei tempi* e la *contrazione delle lunghezze*,
- l'*equivalenza massa-energia*,

ritenuti essenziali per capire l'innovazione dei concetti di spazio e tempo e l'implicazione che essa ha sul concetto di massa inerziale. Per questi contenuti, le propedeuticità indispensabili sono solo concetti di fisica classica. Questa scelta lascia fuori molti argomenti, quali il concetto di spazio quadridimensionale, la metrica pseudo-euclidea, l'ordinamento parziale del tempo (principio di causalità) e l'invarianza delle leggi fisiche per trasformazioni di Lorentz. Si tratta di concetti molto importanti, per affrontare i quali tuttavia i tempi necessari sono notevoli, anche perché la matematica è subito più complessa, quindi vanno affrontati solo se la classe è ben preparata e c'è un tempo adeguato a disposizione. In effetti, la trattazione del cronotopo di Minkowski comporta l'ulteriore difficoltà, per gli studenti, di assimilare la geometria dello spazio-tempo, senza contare il fatto che non conoscono il concetto di metrica e le proprietà degli spazi metrici. E l'assunzione, come postulato, del principio di relatività risulta piuttosto difficile da inserire (la verifica della non covarianza delle equazioni di Maxwell è piuttosto lunga e noiosa) e da metabolizzare, dal momento che la generalizzazione a sistemi di riferimento non inerziali non può essere affrontata a questo livello; sicché c'è il rischio che il problema non venga percepito nella sua portata (non si capisce – a ragione – perché siano così speciali i sistemi inerziali se la relatività nega l'esistenza di un sistema in quiete assoluta). Inoltre le propedeuticità richieste sarebbero molto pesanti (ad esempio le equazioni di Maxwell normalmente non si affrontano, nella forma richiesta, in una scuola secondaria).

Abbiamo perciò scelto di partire dalla discussione degli esperimenti di Fizeau e di Michelson-Morley, e dall'inapplicabilità delle trasformazioni di Galileo al calcolo della forza di Lorentz, presentando così la teoria della relatività ristretta come la più geniale ed elegante soluzione di problemi teorici e sperimentali preesistenti, senza trascurare di presentarne le nuove previsioni cinematiche e dinamiche. Questa trattazione richiede, come prerequisiti, i concetti di sistema di riferimento e di trasformazione di coordinate nel passaggio da un sistema all'altro, le trasformazioni di Galileo, la meccanica newtoniana, l'elettromagnetismo.

Avendo messo tutti i problemi da una parte e tutte le risposte della teoria dall'altra, la nostra scelta non offre proprio una ricostruzione fedele della successione storica degli eventi. Però presenta dei punti a suo favore. Così facendo si prospetta la possibilità di presentare la teoria della relatività come esemplare di teoria scientifica, ripercorrendo le tappe del processo di formazione della conoscenza scientifica come normalmente individuate dall'epistemologia moderna: aspettative (apriori genetico-culturali, memoria, stato dell'arte), confutazione sperimentale delle aspettative e conseguente nascita di un problema, creazione di una teoria come tentativo di soluzione dello stesso (con l'introduzione di nuove ipotesi), previsioni osservative ulteriori, tentativo di confutazione della teoria (e sua corroborazione nel caso sopravviva alla critica).

È chiaro che la scelta di taglio operata è un'ipotesi, e non pretende assolutamente di essere l'unica possibilità né la migliore. La speranza, tuttavia, è che consenta di cogliere la bellezza della teoria e che risponda all'obiettivo per cui è stata effettuata questa scelta, vale a dire «*per evitare che allo studente, poco pratico di fisica, accada come al viandante, che passando fra gli alberi non riesce a vedere la foresta*» (A. Einstein, “*Relatività: esposizione divulgativa*”).

Indice

1 PARTE UNIVERSITARIA	3
1.1 Alcune evidenze sperimentali contrarie all'ipotesi dell'etere	3
1.1.1 Esperimento di Fizeau	3
1.1.2 Esperimento di Michelson e Morley	4
1.1.3 La forza di Lorentz: un'apparente contraddizione	8
1.2 Nascita della teoria della relatività	9
1.2.1 L'ipotesi di Einstein	9
1.2.2 Le trasformazioni di Lorentz	11
1.2.3 Composizione delle velocità	19
1.2.4 Dilatazione dei tempi	20
1.2.5 Contrazione delle lunghezze	20
1.2.6 Conferme sperimentali	21
1.3 Potere esplicativo della teoria	23
1.3.1 Esperimento di Fizeau	24
1.3.2 Esperimento di Michelson e Morley	24
1.3.3 Forza di Lorentz: un'apparente contraddizione	24
1.4 La dinamica relativistica	26
1.4.1 Quantità di moto ed energia relativistica	26
1.4.2 Le trasformazioni di Lorentz per energia e quantità di moto	30
1.4.3 Particelle prive di massa a riposo	32
2 PARTE SCOLASTICA	34
2.1 Esperimenti per rivelare il “vento d'etere”	34
2.1.1 Introduzione	34
2.1.2 Esperimento di Fizeau	34
2.1.3 Esperimento di Michelson e Morley	35
2.1.4 La forza di Lorentz: un'apparente contraddizione	38
2.2 La teoria della relatività	39
2.2.1 Le trasformazioni di Lorentz	39
2.2.2 Composizione delle velocità	41
2.2.3 Spiegazione dell'esperimento di Fizeau	42
2.2.4 Dilatazione dei tempi	42
2.2.5 Contrazione delle lunghezze	44
2.2.6 Spiegazione di Michelson-Morley	45
2.2.7 Spiegazione dell'apparente contraddizione nella forza di Lorentz	46
2.3 Conferme sperimentali	47
2.4 Relativismo e spazio-tempo	48
2.5 Dinamica relativistica	52
2.5.1 Massa e quantità di moto	52
2.5.2 Energia cinetica relativistica – Equivalenza massa-energia	56
2.5.3 Applicazioni	58
2.6 Complementi	60
2.6.1 Evoluzione storica dell'idea di “etere”	60

1 PARTE UNIVERSITARIA

1.1 Alcune evidenze sperimentali contrarie all'ipotesi dell'etere

Fino alla fine del 1800 si supposeva l'esistenza di un ente materiale, chiamato *etere* (vedi complementi), che permeava tutto lo spazio e che doveva essere l'unico ente privo di ogni movimento nell'universo. Tale idea era talmente radicata nel pensiero dei fisici che fecero molti sforzi diretti a rilevarlo sperimentalmente, cercando di misurare quello che venne chiamato vento (o corrente) di etere.

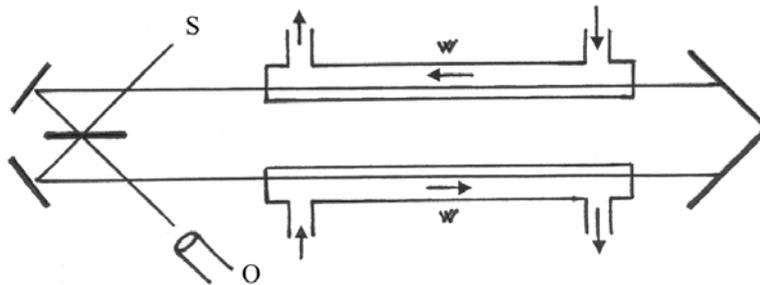
In conseguenza alla teoria di Fresnel ($\simeq 1817$) e della verifica sperimentale di alcune sue previsioni, la comunità scientifica aveva accertato che la luce consistesse in un fenomeno ondulatorio e, in analogia con tutti i fenomeni ondulatori conosciuti all'epoca, sembrava perfettamente naturale ammettere che esistesse un mezzo materiale le cui vibrazioni costituissero la luce. D'altra parte la teoria elettromagnetica di Maxwell (e la sua conferma mediante le esperienze di Hertz) aveva contribuito, in un certo qual modo, ad una "dematerializzazione" dell'etere stesso: infatti una difficoltà consisteva nel fatto che si era dimostrato che nella luce si hanno oscillazioni puramente trasversali, e quindi non si poteva modellizzare l'etere come un fluido, in quanto nei fluidi possono propagare solo oscillazioni longitudinali. Si doveva quindi ricorrere, contro ogni intuizione, a modelli di tipo elastico, in modo che le deformazioni e gli sforzi conseguenti avrebbero fornito un'interpretazione meccanica del campo elettromagnetico. Tuttavia il problema del "vento d'etere" permaneva ancora nella seguente forma: *comprendere se le equazioni di Maxwell debbano avere diverso aspetto nei diversi sistemi di riferimento inerziali*, e in particolare se la velocità della luce debba sommarsi in maniera galileiana.

Tutti gli esperimenti volti a questo scopo diedero esito negativo. Tuttavia, sebbene non si riuscisse a rivelare l'esistenza dell'etere, essa non fu messa in dubbio fino al XX secolo e si continuarono a cercare esperimenti che la dimostrassero inequivocabilmente, tentando anche di capire come i corpi si muovessero nell'etere e come questo moto potesse influenzare la velocità della luce quando è misurata da un osservatore terrestre.

Alcuni esperimenti portarono a supporre che l'etere venisse trascinato da un oggetto che si muove in esso, come una nave in movimento trascina dietro di sé un po' d'acqua. Questa teoria (di cui non ci occupiamo in questa sede) venne ideata dal fisico e matematico francese Augustin J. Fresnel (1788 – 1827) che dedusse un ipotetico coefficiente di trascinamento. Poiché quest'ultimo fu determinato su basi unicamente teoriche, era necessario eseguire degli esperimenti per darne una prova empirica. Si cercò, quindi, di misurare la velocità della luce in un mezzo in movimento. Tale esperimento venne realizzato nel 1851 dal fisico francese Armand H. L. Fizeau (1819 – 1896).

1.1.1 Esperimento di Fizeau

L'apparato sperimentale utilizzato da Fizeau per determinare la velocità della luce in un mezzo in movimento è schematizzato nella figura sottostante.



Nei due tubi viene fatta scorrere dell'acqua alla velocità w , in versi opposti, come mostrato in figura. Grazie ad un *beam splitter* il segnale di luce prodotto dalla sorgente monocromatica S viene suddiviso in due parti che seguono, grazie a degli specchi, lo stesso percorso rettangolare, ma in versi opposti, finché non interferiscono nell'oculare O . Il segnale riflesso si muove in senso orario, mentre quello trasmesso in verso opposto; in questo modo, nei due tubi solo il fascio trasmesso propaga nello stesso senso in

cui scorre l'acqua. Poiché nel campo dell'oculare si osservano delle frange di interferenza, generate dai segnali trasmesso e riflesso, questi devono avere una certa differenza di fase. Se si suppone che l'etere sia trascinato da un corpo in movimento, le frange si dovrebbero spostare passando dalla situazione in cui l'acqua nei due tubi è ferma, a quella in cui l'acqua si muove con velocità w .

Determiniamo, in primo luogo, lo sfasamento e la differenza di cammino ottico tra il segnale di luce riflesso e quello trasmesso. Se ogni tubo è lungo L , i tempi impiegati dal fascio trasmesso (t_t) e riflesso (t_r) per percorrerli entrambi sono rispettivamente:

$$t_r = \frac{2L}{v-w}, \quad t_t = \frac{2L}{v+w}$$

dove $v = c/n$, con n indice di rifrazione dell'acqua, è la velocità della luce nell'acqua; la differenza di fase $\Delta\phi$ tra i due segnali è quindi

$$\Delta\phi = \omega(t_t - t_r) = \frac{4Lw}{v^2 - w^2} = \frac{4Lw}{v^2 \left(1 - \frac{w^2}{v^2}\right)}$$

dove $\omega = vk$, con k numero d'onda; la differenza di cammino ottico Δl , sfruttando il fatto che $w \ll v$, è pari a

$$\Delta l = \frac{\Delta\phi}{k} = \frac{\omega}{k} \frac{4Lw}{v^2 \left(1 - \frac{w^2}{v^2}\right)} = \frac{4Lw}{v \left(1 - \frac{w^2}{v^2}\right)} \simeq \frac{4Lw}{v} = \frac{4Lnw}{c}$$

(quando l'acqua non è in moto $\Delta l = 0$). Se si fa variare la velocità dell'acqua da 0 a w , si dovrebbero veder passare N frange di interferenza, con $N = \Delta l / \lambda^1$. Se $L = 2,5$ m e $w = 30$ m/s, essendo per l'acqua $n = 1,33$, la differenza di cammino ottico vale $\Delta l = 1,33 \cdot 10^{-6}$ m, pari a circa due volte la lunghezza d'onda del rosso; utilizzando una sorgente monocromatica rossa, si dovrebbero quindi veder passare due frange. Lo spostamento delle frange si verifica in realtà, ma in misura inferiore a quanto previsto dalla teoria, come se la velocità di trascinamento dell'etere non fosse w , ma una velocità minore w' , data da

$$w' = w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

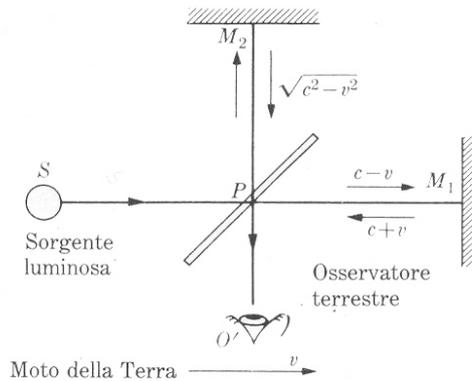
dove $1 - 1/n^2$ è detto *coefficiente di trascinamento di Fresnel*. I mezzi in movimento sembrano, quindi, trascinare "parzialmente" l'etere, avendo $w' < w$. Questo risultato non è la prova dell'esistenza dell'etere e che esso venga trascinato dagli oggetti che circonda, in modo da non essere rivelato, ma sarebbe una delle possibili spiegazioni se e solo se l'etere esistesse realmente. Questo effetto, come vedremo successivamente, viene invece spiegato chiaramente dalla teoria della relatività.

1.1.2 Esperimento di Michelson e Morley

A partire dal 1879, gli statunitensi Albert Michelson (fisico, 1858 – 1931) e Edward Morley (chimico, 1838 – 1923) fecero diversi esperimenti per determinare la velocità della luce secondo diverse direzioni rispetto alla Terra, sfruttando un particolare interferometro da loro ideato e cercando anche di stabilire la velocità assoluta della Terra rispetto all'etere o, perlomeno, di verificarne il moto rispetto ad un ipotetico sistema privilegiato. Il più famoso di questi esperimenti venne realizzato nel 1881.

¹Avendo interferenza costruttiva se la differenza di cammino ottico è multipla della lunghezza d'onda ($\Delta l = m\lambda$) ed avendo interferenza distruttiva se è multipla dispari di mezza lunghezza d'onda ($\Delta l = \lambda(2m+1)/2$), se si ha uno spostamento di N frange chiare (o scure), si ha $\Delta l = N\lambda$.

Si consideri lo schema dell'apparato sperimentale di Michelson e Morley riportato nella figura



dove S è una sorgente di luce monocromatica, M_1 e M_2 sono due specchi posti alla stessa distanza L' (misurata da un osservatore terrestre) da una lastra di vetro P parzialmente argentata (che funge da *beam splitter*) che divide il fascio di luce proveniente da S in due parti: quella trasmessa propaga verso M_1 , quella riflessa verso M_2 . I due segnali proseguono in direzioni perpendicolari tra loro fino agli specchi, dove vengono riflessi indietro verso la lastra P , raggiungendo poi l'osservatore O' in moto con la Terra, che può visualizzare su uno schermo le possibili figure di interferenza prodotte dai due fasci. Infatti, se il tempo impiegato dalla luce per andare da P a M_1 e tornare in P coincide con quello che la luce impiega per andare da P a M_2 e poi ritornare a P , i fasci che giungono in O' saranno in fase e si rafforzeranno l'un l'altro; se invece i due tempi sono diversi, i due segnali saranno sfasati e quindi produrranno delle figure di interferenza sullo schermo.

Indicando con w e c rispettivamente le velocità della Terra e della luce misurate rispetto ad un osservatore O stazionario rispetto all'etere ed utilizzando le leggi galileiane di composizione delle velocità, si possono ricavare le velocità con cui i fasci di luce percorrono i diversi tratti dell'apparato sperimentale e di conseguenza anche i tempi di percorrenza degli stessi.

In primo luogo, si prenda in considerazione il segnale di luce trasmesso dalla lastra P , proveniente dalla sorgente S . Per andare dalla lastra P allo specchio M_1 , la velocità del fascio è pari a $c - w$, di conseguenza il tempo t'_{1a} (pedice a - andata) impiegato per percorrere il tratto PM_1 è

$$t'_{1a} = \frac{L'}{c - w}.$$

Tornando verso la lastra P , la velocità vale $c + w$ e quindi il tempo t'_{1r} (pedice r - ritorno) di percorrenza del tratto M_1P è

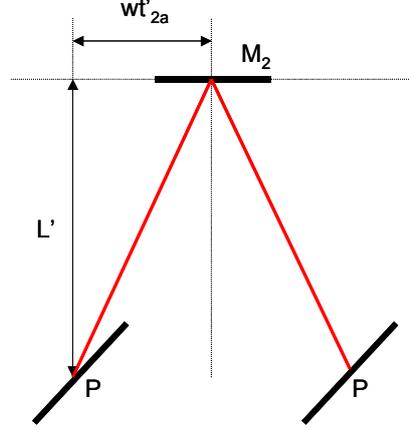
$$t'_{1r} = \frac{L'}{c + w}.$$

Quindi la luce impiega un tempo $t'_1 = t'_{1a} + t'_{1r}$ per raggiungere lo specchio M_1 e tornare alla lamina P che vale (definendo $\beta = w/c$):

$$t'_1 = \frac{L'}{c - w} + \frac{L'}{c + w} = \frac{2L'c}{c^2 - w^2} = \frac{2L'/c}{1 - \beta^2}.$$

Si consideri ora la parte del fascio di luce proveniente dalla sorgente S che viene riflesso dalla lastra P . Per determinare il tempo necessario affinché il segnale, dopo essere stato riflesso, raggiunga lo specchio M_2 e poi torni sulla lastra P , bisogna tener conto del fatto che lungo il braccio PM_2 dell'interferometro

la luce “segue un percorso a zig-zag” rispetto al sistema di riferimento solidale con l’etere a causa del moto dell’apparato sperimentale, come mostrato in figura.



Riferendosi alla figura precedente è facile determinare il tempo t'_2 impiegato dalla luce per arrivare allo specchio M_2 e tornare alla lastra P . Infatti, se il segnale di luce, che viaggia alla velocità c arriva in M_2 in un tempo t'_{2a} , lo specchio, intanto, si è spostato di wt'_{2a} , perciò la distanza d tra la lastra P e lo specchio M_2 diventa

$$d = ct'_{2a} = \sqrt{L'^2 + w^2 t'^2_{2a}}.$$

Si può così ricavare il tempo t'_2 per l’andata e il ritorno in P del segnale di luce. Dall’espressione precedente si ricava

$$t'_{2a} = \frac{L'}{c\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Poiché il tempo per tornare in P da M_2 coincide con t'_{2a} , per t'_2 si ha:

$$t'_2 = 2t'_{2a} = \frac{2L'/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Questo risultato è diverso da quello ottenuto per t'_1 (si ha $t'_1 > t'_2$)² e perciò i segnali di luce che giungono all’osservatore O' hanno una certa differenza di cammino ottico che dovrebbe dar luogo ad una figura di interferenza sullo schermo.

Se si suppone che l’onda monocromatica generata dalla sorgente S abbia una pulsazione ω , i due fasci provenienti dagli specchi M_1 e M_2 arrivano in O' con una differenza di fase $\Delta\phi$ così calcolabile

$$\Delta\phi = \omega(t'_1 - t'_2) = \omega \frac{2L'}{c} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = 2kL' \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right),$$

dove k è il modulo del vettore d’onda ed è legato ad ω dalla relazione $\omega = ck$. Questa differenza di fase equivale ad una differenza di cammino ottico Δl pari a (si ricordi che $\Delta\phi = k \Delta l$)

$$\Delta l = \frac{\Delta\phi}{k} \simeq 2L' \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{1 - \beta^2/2} \right) \simeq 2L' \left(1 + \beta^2 - 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) = \beta^2 L'$$

²I numeratori che compaiono nelle espressioni di t'_1 e t'_2 sono gli stessi e rappresentano il tempo che sarebbe impiegato dai segnali di luce se l’interferometro fosse fermo (avendo $PM_1 = L' = PM_2$). I denominatori, invece, rappresentano l’effetto dovuto al moto dell’apparato sperimentale, effetto non identico nei due casi, ma che dipende dal parallelismo o meno del vettore della velocità v con quello di c .

dove si è tenuto conto del fatto che $\beta \ll 1$.

Avendo Δl non nullo, sullo schermo dovrebbero formarsi delle figure di interferenza, ma come si può essere sicuri che PM_1 e PM_2 siano esattamente uguali e quindi che i calcoli fatti in precedenza siano corretti? Non conoscendo la direzione della velocità della Terra rispetto all'etere, come si può supporre che effettivamente il vettore della velocità v sia parallelo a PM_1 ? Per ovviare a questi due problemi si può modificare l'esperimento, non andando a visualizzare delle possibili figure di interferenza, ma lo slittamento delle frange di interferenza che si dovrebbe verificare ruotando di 90° l'apparecchiatura, così che i due bracci PM_1 e PM_2 si scambino e quest'ultimo sia lungo la direzione del moto. Con questo cambiamento di posizione dell'apparato sperimentale, sullo schermo a disposizione di O' si dovrebbero veder passare N frange di interferenza³ con

$$N = \frac{2L'\beta^2}{\lambda}.$$

Se si assume l'etere in quiete rispetto alla Terra e solidale con il Sole, si può determinare β sapendo che la distanza media tra la Terra e il Sole è circa $1,5 \cdot 10^{11}$ m e che il periodo di rivoluzione della Terra intorno al Sole è $365 \text{ d} = 3,15 \cdot 10^7$ s. Infatti:

$$w = \frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}{3,15 \cdot 10^7} \simeq 3 \cdot 10^4 \text{ m/s} \quad \implies \quad \beta = \frac{w}{c} = 10^{-4}.$$

Ponendo $\lambda = 546,1 \text{ nm}$, $L' = 21 \text{ m}$ (come nell'esperimento eseguito da Michelson e Morley) e tenendo conto della relazione appena ottenuta si ricava $N = 0,76$ che, anche con gli strumenti dell'epoca, è un risultato visibile: dovrebbe esserci il passaggio da una frangia chiara ad una scura, avendo $N < 1$. Invece non si osserva nessuno spostamento di frange di interferenza. Sia il primo esperimento del 1879 che quelli successivi, sempre più precisi, eseguiti a varie ore del giorno e periodi dell'anno (in modo da avere diverse velocità dell'interferometro rispetto alle stelle fisse) non mostrarono mai alcuno spostamento delle frange di interferenza, come invece ci si aspetterebbe dall'analisi fatta.

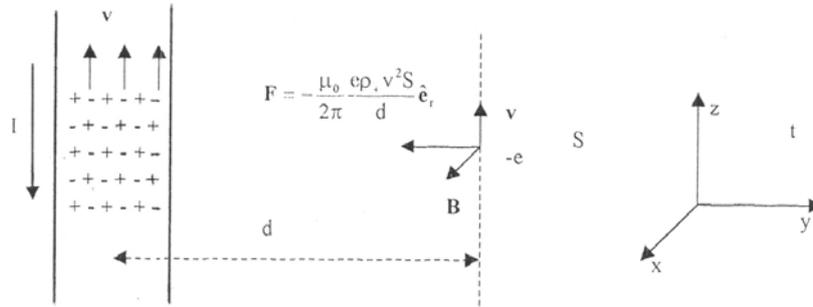
Una possibile spiegazione del risultato nullo dell'esperimento potrebbe essere che l'etere venga trascinato dai corpi in movimento, per cui l'interferometro risulterebbe, in realtà, fermo rispetto all'etere e, quindi, la velocità di propagazione dei segnali di luce sarebbe c in ogni direzione (si avrebbe $\beta = 0$ e quindi $t'_1 = t'_2$). Questa spiegazione è, però, in contraddizione con il risultato ottenuto con l'esperimento di Fizeau del 1851 descritto in precedenza. L'ipotesi dell'esistenza dell'etere sembra quindi essere insostenibile; sembra non esistere alcun sistema privilegiato. Solo grazie alla teoria della relatività, 24 anni dopo, si riuscì, come mostreremo successivamente, a spiegare il risultato dell'esperimento di Michelson e Morley.

Effettivamente furono i risultati negativi di questo esperimento a stimolare Einstein ad abbandonare l'idea dell'esistenza dell'etere e a supporre che la velocità della luce debba avere lo stesso valore per tutti gli osservatori in moto rettilineo uniforme, indipendentemente dal moto relativo tra i corpi che la ricevono e la emettono.

³Se in un interferometro si ha una differenza pari a d tra le lunghezze dei due bracci percorsi dai segnali di luce, allora i due segnali giungono sullo schermo con una differenza di cammino ottico Δl pari a $2d$. Se $2d = m\lambda$, cioè Δl è multiplo intero della lunghezza d'onda λ della sorgente di luce monocromatica, allora si ha interferenza costruttiva. Se $2d = (2m+1)\lambda/2$, si ha interferenza distruttiva. Variando d , al centro della figura di interferenza, si ha un'alternanza di frange chiare e scure. Se $2d = (m+1/2)\lambda$ centralmente si ha una frangia scura; aumentando ulteriormente la differenza tra la lunghezza dei due bracci, si passa a $2d = (m+1)\lambda$, cioè si ha una frangia chiara, e così via. Con una differenza di lunghezza pari a D si ha, quindi, $2D = N\lambda$ dove N è il numero di frange chiare (o scure) che si vedono "passare" al centro della figura di interferenza.

1.1.3 La forza di Lorentz: un'apparente contraddizione

Oltre ai due esperimenti "storici" precedenti esistono altri effetti osservabili che non si riescono a spiegare con una trattazione non relativistica.



Prendendo in considerazione un conduttore cilindrico infinito, di sezione costante, percorso da una corrente I , possiamo pensare quest'ultima come il risultato del moto degli elettroni all'interno del conduttore. Tale moto avviene in verso opposto rispetto a quello della corrente ed è caratterizzato da una certa velocità v (le cariche negative sono in moto, mentre quelle positive sono ferme, come evidenziato in figura). Supponiamo che ad una distanza d dal centro del cilindro conduttore si trovi un elettrone che si muove con la stessa velocità (sia in modulo che in verso) degli elettroni all'interno del conduttore. Considerando il sistema xyz riportato in figura, il moto degli elettroni e , quindi, anche la corrente I , sono lungo la direzione z . Vogliamo ora determinare la forza che viene esercitata sull'elettrone in moto all'esterno del conduttore. Cominciamo ad analizzare quello che avviene nel conduttore. Poiché quest'ultimo è globalmente neutro (non c'è un campo elettrostatico), per la densità totale di carica ρ vale $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$, dove ρ_+ e ρ_- sono rispettivamente la densità di carica positiva e negativa. Dalla espressione precedente si ricava quindi che $\rho_- = -\rho_+$. Da questa uguaglianza e dalla definizione di densità di corrente \mathbf{j} prodotta, in questo caso, dal moto degli elettroni nel conduttore cilindrico, si può scrivere:

$$\mathbf{j}_z = \rho_- \mathbf{v} = -\rho_+ \mathbf{v}.$$

Indicando con A la sezione del conduttore, la corrente I , opposta al moto degli elettroni, è data da

$$I = A|\mathbf{j}_z| = A\rho_+ |\mathbf{v}| = A\rho_+ v.$$

Secondo la legge di Biot-Savart, questa corrente produce, ad una distanza d dall'asse del conduttore, un campo \mathbf{B} pari in modulo a:

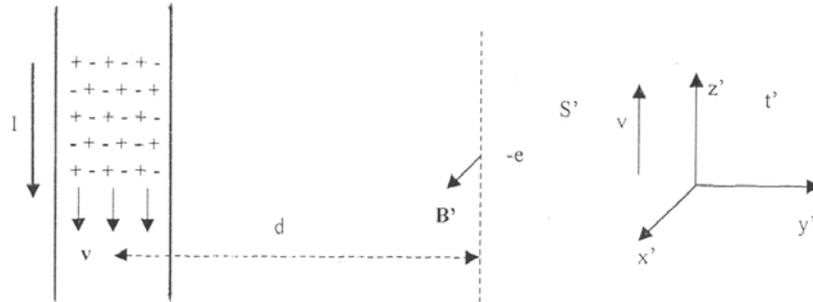
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{\mu_0 A\rho_+ v}{2\pi d},$$

che, facendo riferimento alla figura, ha direzione ortogonale al foglio e verso uscente da esso. L'elettrone che si trova alla distanza d è quindi soggetto alla forza di Lorentz \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = -evB\mathbf{e}_r = -\frac{\mu_0 A e \rho_+ v^2}{2\pi d} \mathbf{e}_r$$

dove \mathbf{e}_r è il versore della direzione radiale all'asse del cilindro e giace quindi nel piano xy . Il segno $-$ implica che la forza \mathbf{F} è attrattiva e perciò l'elettrone si avvicina al conduttore. Tutto questo è quello che accade nel sistema di riferimento, che chiamiamo S , in cui l'elettrone si muove con velocità v , nel verso delle z crescenti e quindi opposta alla corrente I del conduttore.

Nel sistema di riferimento solidale con l'elettrone esterno, che denotiamo con S' , la situazione è diversa in quanto sia esso che quelli del conduttore appaiono fermi, mentre le cariche positive si muovono nel verso delle z decrescenti con una velocità v , come riportato in figura.



In questa situazione si ha una corrente I' nel conduttore data dal moto delle cariche positive, che è identica a quella osservata nel sistema di riferimento S ; si ha infatti $I' = I$ perché $I' = A\rho_+v$. Quindi anche il campo B che si produce ad una distanza d dall'asse del conduttore, dove si trova l'elettrone, assume lo stesso valore del caso precedente. Infatti:

$$B' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi d} = \frac{\mu_0 A\rho_+v}{2\pi d} = B.$$

Calcolando la forza di Lorentz \mathbf{F}' che agisce sull'elettrone esterno, otteniamo un valore nullo, diversamente da quanto si osserva nel sistema S , in quanto l'elettrone è fermo ($v' = 0 \Rightarrow \mathbf{F}' = 0$). Si ha perciò una contraddizione in quanto l'elettrone nel sistema di riferimento S' non pare risentire di nessuna forza, mentre in S è soggetto alla forza di Lorentz \mathbf{F} . Come può avvenire che l'elettrone sia soggetto o no ad una forza a seconda del sistema di riferimento inerziale considerato?

A questo interrogativo, come pure a quelli sollevati dagli esperimenti di Fizeau e Michelson-Morley, fornisce una risposta esaustiva la teoria della relatività.

1.2 Nascita della teoria della relatività

1.2.1 L'ipotesi di Einstein

Giunti a questo punto risulta quindi evidente che ci si trova costretti ad operare una "scelta": o le trasformazioni di Galileo sono corrette, e quindi sono sbagliate le equazioni di Maxwell (che unificano tutte le leggi dell'elettromagnetismo), oppure sono corrette le equazioni di Maxwell e sbagliate le trasformazioni di Galileo. Infatti, come abbiamo visto, non possono essere valide entrambe: i risultati dell'esperienza di Fizeau e quelli dell'esperienza di Michelson sono inconciliabili con l'ipotesi dell'etere, con la legge di composizione delle velocità e quindi con le trasformazioni di Galileo.

La definitiva soluzione ai problemi sopra riportati venne fornita da Einstein, in un articolo del 1905, in cui viene enunciata quella che a posteriori avrebbe assunto il nome di *teoria della relatività ristretta o speciale* (per distinguerla dalla *teoria della relatività generale*, portata a compimento nel secondo decennio del XX secolo). Il punto di vista di Einstein abolisce completamente la necessità dell'idea di etere come mezzo propagatore delle onde elettromagnetiche e, con esso, il concetto di spazio e tempo assoluti. Veniamo quindi ad illustrare i punti fondamentali dell'approccio einsteiniano e le rivoluzionarie conseguenze a cui porta.

In primo luogo è necessario avere ben chiaro che la teoria della relatività (ristretta) concentra la sua attenzione su di un punto cruciale, ovvero sul principio di *costanza di velocità della luce*. Tutto il resto essa lo prende come già era stato accettato dalla tradizione. Infatti, come afferma esplicitamente lo stesso Einstein:

«La teoria della relatività ristretta non è altro che un adeguamento del concetto di sistema inerziale alla convinzione, maturata con l'esperienza, che la velocità della luce sia costante rispetto ad ogni sistema inerziale». (Albert Einstein, Lettera a Michele Besso n° 22).

Si assume infatti l'esistenza di sistemi di riferimento, che vengono indicati con il termine di *sistemi inerziali*, muniti di un sistema di coordinate spaziali e temporali, aventi la proprietà secondo cui *i corpi non soggetti a forze si muovono rispetto ad essi di moto rettilineo uniforme*. In questo punto non ci si discosta dalla relatività di Galileo, che ipotizza esattamente la stessa cosa. Per quel che riguarda il principio di costanza della velocità della luce, l'evoluzione storica che porta a ritenere tale ipotesi un postulato fondamentale della Natura si può riassumere brevemente nei punti salienti che testè riportiamo.

Citandolo nuovamente Einstein:

«Esempi come questo, come pure i tentativi falliti di individuare un qualche movimento della Terra relativamente al "mezzo lumifero" suggeriscono che i fenomeni elettrodinamici, al pari di quelli meccanici, non possiedono proprietà corrispondenti all'idea di quiete assoluta. Essi suggeriscono piuttosto che per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica varranno anche la stesse leggi elettrodinamiche». (A. Einstein, Relatività: esposizione divulgativa)

Einstein giunse quindi a postulare che i fenomeni elettromagnetici non privilegiano alcun sistema inerziale, in particolare ammettendo che *la luce si propaghi con la medesima velocità c in tutti i sistemi inerziali*. Tale postulato prende il nome di *principio di costanza della velocità della luce*. Tale postulato è un'ipotesi di natura fisica, riguardante il comportamento degli strumenti di misura nel passaggio (si osservi bene: mediante un movimento non-inerziale) da un riferimento inerziale ad un altro.

Nell'articolo originario di Einstein il principio di costanza della velocità della luce veniva formulato in modo equivalente a quello appena esposto, prendendo tuttavia in considerazione la *sincronizzazione* degli orologi.

Prima di esporre il metodo seguito da Einstein, soffermiamoci brevemente a riesaminare il significato che attribuiamo al termine *sincronizzazione*. Si osservi che il concetto di sincronizzazione è direttamente legato a quello di simultaneità: due orologi sono sincronizzati se le loro lancette si sovrappongono simultaneamente allo stesso numero del quadrante (definizione operativa!). Conviene quindi supporre che in ogni punto del sistema K sia disposto un orologio ad esso solidale, che lo stesso valga per il sistema K' e che i due sistemi abbiano ciascuno indipendentemente provveduto a sincronizzare i propri orologi. Supponiamo dapprincipio che la sincronizzazione di orologi disposti in posizioni diverse sia eseguita attraverso il trasporto materiale di orologi campione originariamente sincronizzati, trasporto che avviene a velocità sufficientemente basse⁴ da poter supporre che il funzionamento degli orologi stessi non risenta dello spostamento.

Torniamo quindi ad Einstein. Un osservatore inerziale nel sistema K dice che due orologi posti in due punti A e B dello spazio, solidali con lui e che forniscono dei tempi etichettati rispettivamente con

⁴In questo ambito, oltre che di velocità, bisognerebbe parlare di accelerazioni. Infatti è ovvio che se dobbiamo spostare una serie di orologi fermi in una posizione ad un'altra, dovrà necessariamente variare la loro velocità, e conseguentemente in qualche istante l'accelerazione degli orologi sarà necessariamente non nulla. Si ricordi infatti che in un sistema inerziale ($\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = 0$) il moto interno di un orologio può essere disaccoppiato da quello del baricentro, cosa che non è più vera per un sistema generico. In questo frangente dire che gli orologi vengono spostati con velocità sufficientemente basse equivale a dire che le accelerazioni a cui sono sottoposti sono sufficientemente deboli da non influire sul funzionamento degli orologi stessi.

Inoltre, a posteriori, si può osservare che la richiesta di movimento degli orologi a velocità bassa deve essere intesa come "bassa velocità rispetto a quella della luce". Visto infatti il ruolo limite che la velocità della luce riveste nella teoria della relatività, e che i fenomeni relativistici diventano rilevanti man mano che ci si avvicina alla velocità della luce, tale richiesta si può rileggere nei seguenti termini: "spostare gli orologi con velocità tali da ridurre al minimo gli (eventuali) effetti introdotti dal movimento (inerziale!)". Si osservi tuttavia che tale richiesta, a lato pratico, è sempre verificata visto che le velocità su scala umana sono di parecchi ordini di grandezza più piccole delle velocità della luce.

t_A e t_B , sono *sincronizzati* se soddisfano la seguente proprietà: si fa un esperimento in cui A manda al suo tempo t_A un segnale luminoso verso B , e questo, appena lo riceve a un suo tempo t_B , lo invia nuovamente verso A , che infine lo riceve al suo tempo t'_A . Si ha la sincronizzazione se vale

$$t'_A - t_B = t_B - t_A.$$

Si ammette poi che valga

$$c = \frac{2 AB}{t'_A - t_A}$$

dove AB denota la lunghezza del segmento congiungente A e B rispetto al sistema K . Questa prescrizione sugli orologi in K equivale ad affermare che in tale sistema la luce si propaghi con velocità costante c . In seguito si ammette che una relazione analoga valga, con il medesimo valore c , per un'identica esperienza compiuta da ogni altro osservatore inerziale K' , per ogni coppia di punti solidali con esso. Il punto cruciale è il seguente: nell'enunciare il principio di inerzia si fa già riferimento alla nozione di tempo, e dunque quello che si afferma nella relatività di Einstein è che il tempo che viene definito con il procedimento di sincronizzazione (ovvero secondo il principio di costanza della velocità della luce) è compatibile con il principio d'inerzia.

Si osservi che, una volta introdotto il principio di costanza della velocità della luce in termini di sincronizzazione, quest'ultima può essere effettuata all'interno di ogni riferimento molto più realisticamente attraverso l'emissione di segnali di luce a tempi conosciuti, anziché attraverso il trasporto materiale di orologi a bassa velocità. Così, se al tempo t_0 dell'orologio disposto nell'origine O viene emesso un segnale luminoso, un orologio disposto in P alla distanza r da O dovrà essere regolato, al momento della ricezione del segnale, sul tempo $t_1 = t_0 + r/c$.

Mettiamo in rilievo che il fatto che, nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, si producano dei cambiamenti fisici negli strumenti di misura era del tutto ovvio a Lorentz prima della nuova interpretazione introdotta da Einstein. La differenza di atteggiamento consiste nel fatto che Lorentz si sforzava di escogitare modelli di etere che fornissero un meccanismo per "spiegare" la costanza della velocità della luce. Il contributo di Einstein consistette invece nel prescindere completamente da tali meccanismi e nell'assumere direttamente il principio di costanza della velocità della luce come postulato.

A questo punto vogliamo stabilire come debbano essere modificate le trasformazioni di coordinate tra due sistemi inerziali affinché soddisfino il principio di costanza della velocità della luce. Denoteremo queste nuove trasformazioni come *trasformazioni di Lorentz*, per distinguerle dalle *trasformazioni di Galileo* (dedotte ipotizzando l'assolutezza della contemporaneità).

1.2.2 Le trasformazioni di Lorentz

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali, che denoteremo con K e K' , dotati rispettivamente di coordinate (t, x, y, z) e (t', x', y', z') , il secondo dei quali trasli con velocità \mathbf{w} rispetto al primo (denoteremo nel seguito con w il modulo di tale vettore velocità). Vogliamo stabilire quale deve essere la più generale legge di trasformazione di coordinate tra i sistemi K e K' che *rispetti la relatività del principio d'inerzia*, cioè la più generale trasformazione che faccia in modo che se un particella si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a K , si muove di moto rettilineo uniforme anche rispetto al sistema K' . Dal punto di vista matematico ciò si traduce nel richiedere che la legge di trasformazione sia *affine* (*lineare non omogenea*), ossia del tipo

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathcal{B}, \quad (1)$$

dove \mathcal{A} è una matrice reale e \mathcal{B} è un vettore rispettivamente della forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Il fatto che la trasformazione sia necessariamente lineare *segue immediatamente dall'ipotesi che i due sistemi siano inerziali*. Poiché in un sistema inerziale i moti dei punti non soggetti a forze sono rettilinei uniformi e sono rappresentati da rette, la proprietà dei due sistemi di essere inerziali si traduce nella condizione che la trasformazione da K a K' , dovendo mandare moti rettilinei uniformi in moti rettilinei uniformi, debba mandare rette in rette. Quindi, per una proprietà generale degli spazi lineari, essa è necessariamente affine. Inoltre (ma questo non è un punto cruciale) si può sempre scegliere l'origine delle coordinate dei due sistemi in maniera che la trasformazione sia semplicemente *lineare* (cioè *affine e omogenea*). Questa scelta corrisponde alla convenzione (che noi adotteremo in generale) che la trasformazione mandi l'origine delle coordinate di K nell'origine delle coordinate di K' . Dal punto di vista della trasformazione (1) questo fatto si traduce nell'avere il vettore \mathcal{B} identicamente nullo ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$).

Senza introdurre restrizioni fondamentali, possiamo supporre che il moto traslatorio avvenga lungo la direzione dell'asse x del sistema K , nell'ipotesi che l'asse x' del sistema K' coincida con l'asse x (tuttavia non necessariamente equiverso); in sostanza, i due assi x e x' scorrono l'uno sull'altro. Supponiamo inoltre che all'istante $t = 0$ le origini O e O' dei due sistemi K e K' vengano a coincidere e che in quel momento l'orologio disposto nell'origine di K' segni $t' = 0$ (in modo che, come già precisato, la trasformazione è lineare $\Rightarrow \mathcal{B} = 0$): quindi per $t = t' = 0$ si abbia $O \equiv O'$. A questo punto introduciamo due ulteriori postulati di carattere generale.

1. *Relatività del moto*: gli elementi di \mathcal{A} dipendono solamente dalla velocità w di O' rispetto a K .
2. *Reciprocità del moto*: se w è la velocità di O' rispetto a K , $-w$ è la velocità di O rispetto a K' .

Ragioni di simmetria inducono inoltre ad ammettere che con la disposizione scelta, gli assi coordinati in K' siano ortogonali anche rispetto a K , e perciò sia possibile far coincidere al tempo $t = 0$ tutti gli assi coordinati, non solo quelli delle ascisse. Ammettiamo quindi che debba valere $y = y'$ e $z = z'$ in ogni istante, sicchè ci occupiamo solo delle coordinate (t, x) , (t', x') ⁵. Viste le suddette ipotesi, la relazione (1) si riduce quindi alla forma

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} t' = a_{11}t + a_{12}x \\ x' = a_{21}t + a_{22}x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

che, con ovvio cambiamento di notazione, assume la forma più agile

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \mathcal{A}^* \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2)$$

⁵Si osservi che, a rigore, è necessario dimostrare che valgano proprio le relazioni $y = y'$ e $z = z'$. Infatti, dalle scelte operate sul solo sistema di riferimento, si conclude solamente che $y' = a_{33}(w)y$ e $z' = a_{44}(w)z$. Solamente in forza del postulato di reciprocità si giunge a concludere che $a_{33}(w) = a_{44}(w) = 1$. Omettiamo questa non difficile dimostrazione.

dove i coefficienti della matrice sono a priori qualunque ma, in virtù del precedente postulato, in generale dipendenti da w ⁶. A questo punto cominciamo con lo stabilire un primo risultato riguardante la trasformazione della coordinata spaziale x nel passaggio da K a K' .

Lemma 1 *Il fatto che il sistema K' trasli con velocità w lungo l'asse x di K si traduce analiticamente nella relazione*

$$x' = a(x - wt), \quad (3)$$

con un coefficiente a in generale dipendente dalla velocità (in forza del postulato di relatività), a priori diverso da 1 e da 0.

Dim. Per la linearità della trasformazione (già ammessa), deve essere in particolare $x' = ax + bt$ con opportuni coefficienti reali a, b , o anche

$$x' = a[x + (b/a)t] \quad (4)$$

(è necessario che $a \neq 0$ in quanto x' deve dipendere almeno da x). Il fatto che il secondo sistema K' trasli con velocità w si esprime mediante la condizione che la retta $x' = 0$ (descrivente il movimento $x'(t') = 0$ dell'origine spaziale del secondo sistema come letto dal secondo sistema stesso) appaia nel sistema K come la retta $x - wt = 0$ corrispondente al movimento $x(t) = wt$. Abbiamo dunque la condizione

$$x' = 0 \Leftrightarrow x - wt = 0.$$

Essendo $a \neq 0$, per la legge di annullamento del prodotto la relazione (4) mostra che la relazione $x' = 0$ è equivalente alla relazione $[x + (b/a)t] = 0$; d'altra parte $x' = 0$ deve essere equivalente a $x - wt = 0$ e dunque segue $b/a = -w$. ■

Si osservi come la relazione (3) vale in generale come **solamente** conseguenza del principio di inerzia. Facciamo ora alcune considerazioni. Il punto di vista di Galileo (che conduce a porre $a = 1$ e a ottenere la trasformazione $x' = x - wt$) introduce una serie di ulteriori ipotesi oltre a quella della validità del principio di inerzia. Tali ipotesi sono le seguenti.

1. *L'intervallo di tempo tra due eventi che si riferiscono ad un medesimo oggetto è indipendente dallo stato di moto dell'oggetto e quindi è identico se misurato nel sistema K o nel sistema K' .*
2. *Due eventi che si riferiscono a due oggetti distinti che siano simultanei per K , sono simultanei anche per K' .*
3. *Le dimensioni lineari di un oggetto sono uguali se misurate nel sistema K o nel sistema K' .*

Osserviamo, anche se non ci soffermiamo a discuterlo in dettaglio, che le suddette ipotesi sono interdipendenti tra loro (ad esempio se si accetta la prima ipotesi come valida, segue immediatamente che anche la seconda e la terza sono soddisfatte). Ai nostri scopi basterebbe confutare la seconda ipotesi, sostituendola con la costanza della velocità della luce, per poter giungere a un insieme di nuove trasformazioni (quelle di Lorentz) rispetto alle quali le equazioni di Maxwell sono invarianti.

⁶Anche in questo caso si osservi che, sempre in base alle sole scelte sul sistema di riferimento, dovrebbe valere la relazione

$$t' = a_{11}t + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z$$

dove i coefficienti della combinazione lineare a secondo membro sono tutti in generale dipendenti da w e a priori non nulli. Solo in forza del postulato di reciprocità si può dimostrare che $a_{13} = a_{14} = 0$. Anche qui omettiamo la non difficile dimostrazione.

Dimostriamo ora che, partendo dalla (2) in forza del lemma precedente e *imponendo l'assolutezza della contemporaneità*, ci si riconduce alle usuali trasformazioni di Galileo

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - wt \\ y' = y \\ z' = z. \end{cases}$$

Mantenendo le ipotesi semplificatrici sopra adottate, ci proponiamo di identificare la trasformazione di coordinate

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \mathcal{G}_w \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix},$$

dove la matrice \mathcal{A}^* viene in questo caso denotata con \mathcal{G}_w (matrice 2×2 di Galileo, dipendente dalla velocità w , con $g_{21} = -aw$, $g_{22} = a$). Imporre l'assolutezza della contemporaneità significa in particolare imporre che gli eventi con $t' = 0$ nel sistema K' (cioè giacenti sull'asse delle ascisse di K') siano contemporanei anche per K , cioè siano tali che anche per essi si abbia $t = 0$ (vengano quindi inviati dalla trasformazione sull'asse delle ascisse di K). In forza della linearità deve essere in generale

$$t' = g_{11}t + g_{12}x$$

con opportune costanti g_{11} e g_{12} . Con un ragionamento analogo al precedente, l'assolutezza della contemporaneità deve mandare rette parallele all'asse delle ordinate del sistema K in rette parallele all'asse delle ordinate nel sistema K' . Questo implica che $g_{12} = 0$, e quindi $t' = g_{11}t$. Per comodità di scrittura, cambiamo nome alla costante g_{11} denotandola con b , ottenendo le leggi di trasformazione

$$\begin{cases} t' = bt \\ x' = a(x - wt) \end{cases}$$

da cui la matrice di Galileo è esprimibile come

$$\mathcal{G}_w = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -aw & a \end{pmatrix}.$$

Ora non ci resta che determinare i valori delle costanti a e b . Per giungere a questo risultato è interessante procedere con un metodo che è la parafrasi di quello utilizzato da Einstein nella deduzione delle trasformazioni di Lorentz che incontreremo nel seguito. Consideriamo non una singola trasformazione da K a K' , ma tutta la famiglia di trasformazioni dipendenti dal parametro reale w , velocità di traslazione di K' rispetto a K . Seguendo lo stesso ragionamento di Einstein, ammetteremo che esse siano delle funzioni pari, cioè dipendano effettivamente solo da w^2 , ovvero solo dal modulo $|\mathbf{w}|$ della velocità: dunque, $a(-w) = a(w)$, $b(-w) = b(w)$. Questa ipotesi, denotata da Einstein come ipotesi dell'*isotropia dello spazio* (perché dal punto di vista fisico corrisponde ad assumere che non sia privilegiata nessuna delle direzioni lungo cui il secondo sistema può traslare rispetto al primo), altro non è se non una riformulazione del postulato di reciprocità sopra introdotto. Il procedimento che scegliamo è quello di imporre che debba essere $\mathcal{G}_{-w}\mathcal{G}_w = \mathbb{I}$, dove \mathbb{I} è la matrice identità. Dal punto di vista fisico significa che la trasformazione $(\mathcal{G}_w)^{-1}$ deve coincidere con la trasformazione diretta, quando si scambino i ruoli di K e K' . D'altra

parte per il principio di relatività e quello di reciprocità sembra ragionevole assumere che se K vede muoversi K' con velocità w , allora K' debba vedere K muoversi con una velocità $-w$. Quindi deve valere

$$(\mathcal{G}_w)^{-1} = \mathcal{G}_{-w}. \quad (5)$$

È immediato calcolare la matrice inversa della trasformazione lineare, che risulta essere

$$(\mathcal{G}_w)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/b & 0 \\ w/b & 1/a \end{pmatrix}.$$

La condizione imposta dalla relazione matriciale (5) equivale allora alle tre condizioni numeriche $b^{-1} = b$, $b^{-1} = a$, $a^{-1} = a$, cioè $a = b$, $b^2 = 1$; otteniamo quindi che $b(w) = \pm 1$. Ma per $w = 0$, ossia quando il sistema K' è in quiete rispetto al sistema K , la trasformazione deve ridursi all'identità, ovvero deve valere $\mathcal{G}_0 = \mathbb{I}$, e dunque, per continuità (visto che una funzione continua che può a priori assumere solo due valori diversi è necessariamente costante) si conclude che $b(w) = 1$, da cui segue che $a(w) = 1$. La matrice che compendia le trasformazioni di Galileo è quindi

$$\mathcal{G}_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w & 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che da quanto ricavato si ottiene immediatamente la legge galileiana di composizione delle velocità $v = v' + w$ dove le notazioni sono ovvie⁷.

Arrivati a questo punto vediamo cosa accade se al posto di imporre, come appena visto, l'assolutezza della contemporaneità, imponiamo che la velocità della luce sia costante per qualsiasi riferimento inerziale. Cominciamo con il dimostrare il seguente lemma, che prende il nome di lemma del *tempo locale*.

Lemma 2 (Tempo Locale) *Se vale il principio di costanza di velocità della luce, allora la matrice definente la trasformazione di coordinate da K a K' ,*

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \mathcal{L}_w \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (6)$$

che ora denotiamo con \mathcal{L}_w (e che prende il nome di matrice di Lorentz) deve avere la forma

$$\mathcal{L}_w = \begin{pmatrix} a & b/c \\ cb & a \end{pmatrix} \quad (7)$$

con coefficienti a, b , a priori funzioni di w , entrambi non nulli (c è la velocità della luce).

⁷Si tenga infatti presente che ogni osservatore descrive il moto di uno stesso punto utilizzando le proprie coordinate, e dunque K descrive il moto mediante una funzione $x = x(t)$, e K' mediante la funzione $x' = x'(t')$. Pertanto anche le corrispondenti velocità sono definite rispettivamente da

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad v' = \frac{dx'}{dt'}.$$

D'altra parte, differenziando le trasformazioni di Galileo otteniamo

$$\begin{aligned} dx' &= dx - w dt = \left(\frac{dx}{dt} - w \right) dt = (v - w) dt \\ dt' &= dt \end{aligned}$$

e quindi

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{(v - w) dt}{dt} = v - w.$$

Dim. Consideriamo un raggio di luce che si muove verso destra con velocità c in K' (cioè verso le ascisse sempre maggiori secondo l'usuale orientamento degli assi). Varrà quindi $x'(t') = ct'$, ovvero il propagarsi dell'impulso luminoso è rappresentato dal sottoinsieme del piano cartesiano definito dall'equazione $x' - ct' = 0$. Per il principio di costanza della velocità della luce, tale raggio deve avere velocità c anche in K , cioè il suo movimento deve essere rappresentato dalla funzione $x(t) = ct$, ovvero dalla retta $x - ct = 0$. Analogamente, considerando i raggi che viaggiano verso sinistra, la condizione $x' + ct' = 0$ deve essere equivalente alla condizione $x + ct = 0$. Per cui, sinteticamente:

$$\begin{aligned} x' - ct' = 0 &\Leftrightarrow x - ct = 0 \\ x' + ct' = 0 &\Leftrightarrow x + ct = 0. \end{aligned}$$

Per una qualsiasi trasformazione lineare (come abbiamo ammesso) ciò si traduce nelle relazioni

$$\begin{aligned} x' - ct' &= \lambda(x - ct) \\ x' + ct' &= \mu(x + ct) \end{aligned} \tag{8}$$

dove λ e μ sono parametri arbitrari, funzioni a priori di w . Infatti, ad esempio, la prima delle precedenti equazioni esprime in maniera algebrica che l'annullarsi di $x' - ct'$ è equivalente all'annullarsi di $x - ct$, e analogamente la seconda. Tali relazioni sono anche necessarie: infatti possiamo scrivere una relazione lineare tra (t', x') e (t, x) nel modo seguente:

$$\begin{aligned} x' - ct' &= \lambda(x - ct) + \lambda'(x + ct) \\ x' + ct' &= \mu'(x - ct) + \mu(x + ct). \end{aligned}$$

che equivale ad una relazione lineare tra $(x' - ct', x' + ct')$ e $(x - ct, x + ct)$. Imponiamo ora che $x - ct = 0$ sia equivalente a $x' - ct' = 0$. Dalla prima relazione, sostituendo $x' - ct' = 0$ e $x - ct = 0$, segue allora che deve essere $\lambda'(x + ct) = 0$ quando $x = ct$, ovvero deve essere $2\lambda'x = 0$ per ogni x , e dunque $\lambda' = 0$. Si trova così $x' - ct' = \lambda(x - ct)$ c.v.d. Analogamente per l'altra relazione. Dunque sommando e sottraendo membro a membro le (8) e ponendo

$$a = \frac{\mu + \lambda}{2}, \quad b = \frac{\mu - \lambda}{2}$$

si ha

$$\begin{cases} t' = at + bx/c \\ x' = cbt + ax. \end{cases} \tag{9}$$

Infine si conclude che $a \neq 0$, perché t' deve dipendere almeno da t e x' deve dipendere almeno da x . ■

Soffermiamoci ora sul risultato appena dimostrato e facciamo un'importante osservazione. Come mostrano le equazioni che identificano la trasformazione nell'ipotesi di costanza della velocità della luce, le rette di contemporaneità per K' ($t' = cost$) hanno in K la forma $at + bx/c = cost$ e, dunque, non sono di contemporaneità per K . In altri termini per un punto-evento la coordinata temporale t' rispetto a K' dipende sia dalla corrispondente coordinata temporale t rispetto a K , che da quella spaziale x . Per questo motivo Lorentz usava dire che il tempo in K' è *locale*, cioè dipende non solo dalla coordinata temporale in K , ma anche da quella spaziale.

Il risultato matematico appena ottenuto appare, ad un'analisi superficiale, un *paradosso* (etimologicamente *para-doxa*, contro l'opinione), in quanto afferma che **la simultaneità di due eventi non è un dato assoluto**, come invece siamo ritenuti a credere in base al senso comune. In realtà è proprio il concetto di simultaneità assoluta che non ha senso. Per spiegarlo sfruttiamo il medesimo esempio utilizzato da Einstein.

Consideriamo un osservatore che si trovi su di una banchina e che veda transitare un treno che si muove con velocità w uniforme lungo un binario. Supponiamo inoltre che vi sia un altro osservatore che si trovi esattamente a metà del treno, in un punto che indichiamo con M' . Nell'istante in cui i due osservatori si trovavano uno di fronte all'altro cadono due fulmini che colpiscono il capo e la coda del treno (indichiamo con A il capo e B la coda). L'osservatore sulla banchina si verrà dunque a trovare nel punto medio M del segmento AB . Essendo per ipotesi la velocità della luce costante in qualunque sistema di riferimento, l'osservatore sulla banchina vedrà i due fulmini colpire il treno esattamente nel medesimo istante, perché la luce impiegherà esattamente lo stesso intervallo di tempo per percorrere i due tratti AM e BM che lo separano dalla coda e dal capo del treno (e che sappiamo essere identici). Quando diciamo che la caduta dei due fulmini è simultanea rispetto alla banchina intendiamo quindi dire che i raggi di luce provenienti da A e B si incontrano nel punto medio M dell'intervallo AB sulla banchina. Ci chiediamo ora se la stessa situazione vale per l'osservatore sul treno. Sia M' il punto medio del segmento AB del treno in moto. Proprio quando l'osservatore sulla banchina vede i due fulmini (che per lui sono simultanei), l'osservatore M' sul treno si muove con velocità w verso il raggio di luce che proviene da A , mentre corre avanti al raggio di luce che proviene da B . Pertanto l'osservatore sul treno vedrà prima il raggio di luce proveniente dal capo del treno di quello proveniente dalla coda del treno. Tutti gli osservatori che assumono il treno come loro sistema di riferimento debbono perciò giungere alla conclusione che il lampo di luce proveniente da A ha avuto luogo prima del lampo di luce proveniente da B . Si perviene in questo modo al seguente importante risultato: *gli eventi che sono simultanei rispetto alla banchina non lo sono rispetto al treno e viceversa*. Siamo quindi portati a concludere che ogni sistema di riferimento ha il suo proprio tempo. *Un'attribuzione di tempo ha quindi senso solamente qualora ci venga detto a quale sistema di riferimento ci si riferisce*. Ecco quindi il significato profondo del risultato matematico che abbiamo dedotto poc'anzi.

Torniamo quindi alla deduzione delle nostre trasformazioni. Il nostro problema sarebbe risolto se fossero conosciute le costanti a e b . Per ricavarle, osserviamo che, per l'origine O' di K' abbiamo permanentemente $x' = 0$, e pertanto la seconda delle equazioni (9) deve valere

$$x = -\frac{bc}{a}t.$$

Se il sistema K' trasla con velocità w rispetto a K , allora si ha $bc/a = -w$. Si tratta di una immediata conseguenza del lemma 1, in virtù del quale si deve avere $x' = a(x - wt)$. In altri termini questo risultato si può riottenere direttamente riscrivendo la (6) nella forma

$$\begin{cases} t' = a \left(t + \frac{b}{a}x \right) \\ x' = a \left(x + \frac{b}{a}t \right) \end{cases}$$

e richiedendo che valga l'equivalenza $x' = 0 \Leftrightarrow x - wt = 0$, sicché segue $(cb)/a = -w$. In conclusione la matrice di Lorentz ha la forma

$$\mathcal{L}_w = a \begin{pmatrix} 1 & -w/c^2 \\ -w & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

A questo punto osserviamo che il determinante D della matrice di Lorentz è dato da

$$D := \det \mathcal{L}_w = a^2(1 - w^2/c^2), \quad (11)$$

e che la matrice inversa è

$$(\mathcal{L}_w)^{-1} = \frac{a}{D} \begin{pmatrix} 1 & w/c^2 \\ w & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Ci rimane solamente da determinare la forma del coefficiente a . Anche qui, come nel caso di Galileo, consideriamo tutta la famiglia di trasformazioni dipendente dal parametro velocità $w \in \mathbb{R}$. Abbiamo quindi una famiglia di matrici della forma (10), dove $a = a(w)$, e ammettiamo ancora l'ipotesi di isotropia dello spazio imponendo $a(-w) = a(w)$. Analogamente al caso di Galileo, imponiamo la condizione $\mathcal{L}_{-w}\mathcal{L}_w = \mathbb{I}$, ovvero

$$(\mathcal{L}_w)^{-1} = \mathcal{L}_{-w}.$$

Per confronto tra le due matrici $(\mathcal{L}_w)^{-1}$ e \mathcal{L}_{-w} , ovvero (12) e (10), si ottiene subito $a/D = a$, ovvero $D = 1$.

Resta da determinare la funzione $a = a(w)$. Anzitutto, dall'espressione esplicita del determinante della matrice di Lorentz, $D = a^2(1 - w^2/c^2)$, si vede che la condizione $D = 1$ si traduce nella condizione $a^2(1 - w^2/c^2) = 1$, ovvero $a = \pm 1/\sqrt{1 - w^2/c^2}$. La funzione $a(w)$ ha pertanto due determinazioni. Ma se si chiede che per $w = 0$ la trasformazione si riduca all'identità, $\mathcal{L}_0 = \mathbb{I}$, ovvero $a(0) = 1$, segue allora $a(w) = 1/\sqrt{1 - w^2/c^2}$, funzione che denotiamo con $\gamma = \gamma(w)$. Infine si ha la disuguaglianza $|w| < c$ che segue dal fatto che, nella funzione γ , il radicando al denominatore deve essere non negativo. Riassumendo quanto dimostrato:

TRASFORMAZIONI DI LORENTZ – *Se vale il principio di costanza della velocità della luce, allora la trasformazione di coordinate tra due sistemi inerziali K e K' , di cui il secondo trasli con velocità w lungo l'asse x del primo, è la trasformazione di Lorentz (con $y' = y$, $z' = z$)*

$$\Lambda_w : \begin{cases} t' = \gamma \left(t - x \frac{w}{c^2} \right) \\ x' = \gamma (x - wt) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \mathcal{L}_w \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \mathcal{L}_w = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -w/c^2 \\ -w & 1 \end{pmatrix},$$

dove il coefficiente $\gamma = \gamma(w)$ di Lorentz è definito da

$$\gamma(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.$$

Si ha allora necessariamente $|w| < c$.

In definitiva le trasformazioni di Lorentz sono compendiate dal seguente sistema:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - wx/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \end{cases} \quad (13)$$

Si osservi che le trasformazioni assumono forma più simmetrica se invece di t e t' si introducono le variabili

$$\begin{aligned} \tau &= ct \\ \tau' &= ct' \end{aligned}$$

ossia si misurano i tempi mediante le distanze che in essi la luce percorre, ottenendo quindi

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - \beta \tau) \\ y' = y \\ z' = z \\ \tau' = \gamma (\tau - \beta x) \end{cases} \quad \beta = \frac{w}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

In questo modo si rende maggiormente conto della similitudine tra i ruoli svolti dalle coordinate spaziali e quelle temporali nelle trasformazioni di Lorentz.

1.2.3 Composizione delle velocità

Deduciamo ora, dalle trasformazioni di Lorentz, la *nuova legge di composizione delle velocità*. Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali, con la solita ipotesi sulla disposizione degli assi, e una particella in moto uniforme lungo gli assi x, x' . Differenziando le trasformazioni di Lorentz otteniamo

$$dx' = \frac{dx - wdt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \quad dy' = dy \quad dz' = dz \quad dt' = \frac{dt - \frac{w}{c^2}dx}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \quad (14)$$

che rappresentano gli incrementi infinitesimi delle coordinate corrispondenti ad uno spostamento infinitesimo. A questo punto possiamo ricavare le espressioni per le velocità semplicemente dividendo membro a membro le prime tre equazioni per la quarta. Quindi le velocità nel sistema K' sono date da:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - w}{1 - \frac{wv_x}{c^2}} \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y \sqrt{1 - w^2/c^2}}{1 - \frac{wv_x}{c^2}} \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z \sqrt{1 - w^2/c^2}}{1 - \frac{wv_x}{c^2}}. \quad (15)$$

La legge di composizione inversa si ottiene, per il principio di reciprocità fra i due sistemi, scambiando il ruolo delle variabili ed invertendo il segno della velocità w :

$$v_x = \frac{v'_x + w}{1 + \frac{wv'_x}{c^2}} \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - w^2/c^2}}{1 + \frac{wv'_x}{c^2}} \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - w^2/c^2}}{1 + \frac{wv'_x}{c^2}}. \quad (16)$$

Se, come previsto, per velocità trascurabili rispetto a quella della luce ($w \ll c$), le (15) si riducono alle trasformazioni di Galileo, da esse emerge anche il ruolo limite della velocità della luce: definendo $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ e $v'^2 = v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z$, allora si può scrivere

$$v'^2 = \frac{(v_x - w)^2 + v_y^2 (1 - w^2/c^2) + v_z^2 (1 - w^2/c^2)}{\left(1 - \frac{wv_x}{c^2}\right)^2}.$$

Svolgendo i calcoli a numeratore e sottraendo c^2 da entrambi i membri, si ottiene

$$v'^2 - c^2 = \frac{v^2 + w^2 - 2v_x w - \frac{w^2 v_y^2}{c^2} - \frac{w^2 v_z^2}{c^2} - c^2 \left(1 - \frac{wv_x}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{wv_x}{c^2}\right)^2} = \frac{v^2 + w^2 - \frac{w^2 v^2}{c^2} - c^2}{\left(1 - \frac{wv_x}{c^2}\right)^2}$$

ossia, in definitiva,

$$c^2 - v'^2 = \frac{(c^2 - v^2)(1 - w^2/c^2)}{\left(1 - \frac{wv_x}{c^2}\right)^2}. \quad (17)$$

Dalla (17) si osserva che, nel caso sia $v, w < c$, ne consegue che anche $v' < c$. In particolare, per $v = c$ sarà anche $v' = c$, come del resto si ottiene immediatamente dalla (15) ponendo $v_x = c$.

1.2.4 Dilatazione dei tempi

Ci proponiamo ora di confrontare la durata “propria” di un fenomeno, valutata cioè da un osservatore rispetto al quale il fenomeno appare in quiete, con quella che appare ad un osservatore “stazionario”, rispetto al quale il primo osservatore si muove di moto rettilineo uniforme.

Supponiamo di avere un orologio C' posto sull'asse x' a distanza x'_a dall'origine. Questo orologio, nel suo movimento solidale con il riferimento K' a velocità costante w lungo l'asse delle x , va a coincidere istantaneamente con due orologi sincronizzati (come descritto in § 1.2.1), in quiete rispetto a K , che indichiamo con C_a e C_b . Supponiamo che C' segni il tempo t'_a quando coincide con C_a , il quale a sua volta segni il proprio tempo t_a . Quando poi C' coincide con C_b supponiamo che segni il tempo t'_b mentre C_b segnerà il tempo t_b . Le trasformazioni di Lorentz ci dicono allora quali relazioni passano tra questi tempi. In questo caso è fissata una coordinata del sistema comobile ($x' = cost$) e pertanto conviene considerare le trasformazioni inverse. In particolare, basta considerare la sola parte riguardante i tempi, ovvero

$$\begin{cases} t_a = \gamma(t'_a + x'_a w/c^2) \\ t_b = \gamma(t'_b + x'_b w/c^2) \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene

$$\Delta t = t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \gamma \Delta t' \quad (18)$$

e quindi per l'osservatore K i tempi si dilatano del fattore $\gamma \geq 1$ rispetto ai tempi propri (tempi del sistema comobile con l'orologio C'), per effetto del movimento. In particolare, per $w \rightarrow c$ risulta $\Delta t \rightarrow \infty$, mentre per $w \ll c$ si è ricondotti al caso classico, in cui la durata di un fenomeno è la stessa per ogni osservatore indipendentemente dal suo stato di moto.

Ovviamente il ragionamento può essere capovolto, dal momento che per un osservatore in K' sarà il sistema di riferimento K a muoversi con velocità $-w$ lungo l'asse x' , e pertanto i tempi misurati dagli orologi stazionari rispetto a K gli appariranno dilatati dello stesso fattore. In ciò non vi è nulla di paradossale perché il procedimento nei due casi non è affatto lo stesso: nel secondo caso sarebbe un singolo orologio in quiete rispetto a K ad essere confrontato con due orologi stazionari rispetto a K' ; viceversa, la (18) è stata ottenuta confrontando l'intervallo di tempo misurato da un singolo orologio stazionario rispetto a K' con quello misurato da due distinti orologi fissati in posizioni diverse di K . In effetti anche l'orologio C' deve essere sincronizzato con gli altri due, il che può essere fatto quando la sua posizione viene a sovrapporsi con quella di C_a ; il fatto però che poi venga a trovarsi in moto ci nega, come visto, la possibilità di poterlo considerare ancora sincronizzato con i due orologi fissi rispetto a K : la dilatazione osservata è conseguenza di questa perdita di sincronizzazione come effetto del moto.

1.2.5 Contrazione delle lunghezze

Veniamo all'ulteriore problema di confrontare la lunghezza di un oggetto (o la distanza fra due punti) valutata da un osservatore K' rispetto al quale esso appare in quiete, con quella che appare ad un

osservatore “stazionario” K , rispetto al quale l’oggetto si muove di moto rettilineo uniforme. Per effettuare quest’ultima misura ci sono sostanzialmente due possibilità: misurare la distanza fra due punti dell’asse x a cui, in un certo istante t , vengono a sovrapporsi i due estremi dell’oggetto, oppure misurare l’intervallo di tempo fra il passaggio dei due estremi per uno stesso punto dell’asse x e poi ricavare la lunghezza dell’oggetto dalla legge del moto uniforme, essendo nota la sua velocità rispetto a K' .

Consideriamo dunque un regolo rigido, con estremi A , B , disposto parallelamente all’asse delle x del sistema “stazionario” K , e che trasla lungo tale asse con velocità w , mentre appare a riposo nel sistema K' (“comobile”). Gli estremi del regolo in K' abbiano le coordinate fissate $x'(A) = x'_a$, $x'(B) = x'_b$ rispettivamente. La lunghezza del regolo misurata in K' è perciò data da $L' = x'_b - x'_a$. Questa la chiameremo *lunghezza a riposo* o semplicemente *lunghezza del regolo*. Seguendo l’esposizione divulgativa di Einstein, scattiamo una “istantanea” del regolo dal sistema “stazionario” K . In questo modo è naturale definire come lunghezza del regolo $L = x_b - x_a$, dove le misure dei due estremi x_a , x_b sono effettuate allo stesso istante $t_a = t_b = t$ di K .

Allora, la prima delle trasformazioni di Lorentz fornisce la relazione fra le due coppie di coordinate

$$\begin{cases} x'_a = \gamma(x_a - wt) \\ x'_b = \gamma(x_b - wt) \end{cases}$$

Risolte in x_a e x_b forniscono quelle che possono essere interpretate come le equazioni del moto degli estremi del regolo in K , in quanto x'_a e x'_b sono due numeri fissi:

$$\begin{cases} x_a = wt + x'_a/\gamma \\ x_b = wt + x'_b/\gamma. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni, il termine contenente il tempo si elimina e si resta con la relazione che esprime la lunghezza del regolo in K

$$L = \frac{1}{\gamma} L'. \quad (19)$$

Dunque, poiché $\gamma \geq 1$, il regolo appare contratto nella direzione del moto se guardato dal sistema rispetto al quale risulta in movimento, con una sua istantanea. Per $w \rightarrow c$ risulta $L \rightarrow 0$, mentre per $w \ll c$ si è ricondotti al caso classico, in cui la lunghezza di un oggetto risulta indipendentemente dal sistema di riferimento dell’osservatore.

È chiaro dalla derivazione che se il regolo fosse stato perpendicolare alla velocità w , la sua lunghezza sarebbe rimasta invariata. Quindi, se si considera un corpo esteso di volume V , misurato in K e di volume V' se misurato in K' , avremo la seguente relazione

$$V = V' \sqrt{1 - w^2/c^2} \quad (20)$$

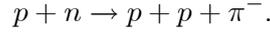
dove la contrazione del corpo avviene nella direzione del moto.

Evidentemente entrambi gli osservatori possono fare delle istantanee, ciascuno relativamente al suo proprio tempo: così l’osservatore K può fotografare un’asta comobile con K' ad esempio nell’istante $t = 0$, e l’osservatore K' può fotografare un’asta in quiete rispetto a K nel suo tempo $t' = 0$. In tal caso, in accordo con il principio di relatività, i due osservatori trovano lo stesso risultato. L’asimmetria, per cui fotografando la stessa asta solo a uno dei due osservatori essa si presenta accorciata, è dovuta al fatto che l’asta è ferma rispetto a uno solo dei due sistemi di riferimento.

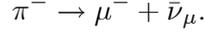
1.2.6 Conferme sperimentali

La prima corroborazione della teoria della relatività in relazione alla dilatazione dei tempi ha riguardato il tempo di vita medio dei *muoni*: si tratta di particelle subatomiche prodotte naturalmente nell’alta

atmosfera dallo scontro di particelle del vento solare con i nuclei degli atomi di gas rarefatti. Anzitutto vengono prodotti dei *pioni*, mesoni molto comuni, secondo la reazione:



In circa 10 secondi, il pione negativo decade in un muone e in un antineutrino muonico, un leptone “compagno” del muone di cui si sa ancora pochissimo:



Anche il muone è una particella instabile; la legge che ne regola il decadimento è del tipo

$$\frac{dN}{dt'} = -\frac{1}{\tau'} N \quad (21)$$

e integrandola si ottiene

$$N = N_0 \cdot e^{-t'/\tau'}, \quad (22)$$

dove N_0 indica il numero di particelle iniziali per unità di superficie ed unità di tempo, N indica la popolazione restante dopo un tempo t' di propagazione e τ' , detto “*tempo di vita media*”, rappresenta il tempo occorrente perché la popolazione decada a e^{-1} volte il valore iniziale. Questo parametro è stato stimato sperimentalmente ottenendo il valore

$$\tau' = 2,197 \mu s \quad (23)$$

per un muone intrappolato in un assorbitore e dunque praticamente fermo rispetto al laboratorio. Osservando allora un fascio di muoni che viaggiano a velocità dell'ordine di quella della luce, secondo la teoria newtoniana la distanza percorsa nell'arco di tempo previsto dovrebbe essere data da

$$l' = c \cdot \tau' \simeq 660 \text{ m} \quad (24)$$

e quindi il fascio dovrebbe sostanzialmente esaurirsi negli strati alti dell'atmosfera. Al contrario, si riesce a rivelare un gran numero di muoni che riescono a raggiungere la bassa troposfera (lo spessore dell'atmosfera è di circa dieci chilometri). Questo risulta spiegabile solo in termini relativistici, proprio come effetto della dilatazione dei tempi: se la velocità dei muoni è $w = 0,999 c$, la (18) prevede infatti che il fattore di dilatazione assuma il valore

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = 22$$

Pertanto il muone può percorrere mediamente una distanza di

$$l = w \cdot \tau = w \cdot \gamma \cdot \tau' \simeq 14,5 \text{ km} \quad (25)$$

prima di decadere, in sostanziale accordo con quanto osservato. Osserviamo che le grandezze direttamente accessibili sperimentalmente non sono τ ed l , ma l'energia W e la quantità di moto p dei muoni, che comunque sono in relazione con esse (vd. § 1.4.1):

$$l = \frac{p\tau'}{m} \simeq \frac{\tau'}{mc} W. \quad (26)$$

L'esempio del muone può anche essere visto come una conferma della contrazione delle distanze. Se infatti ci mettessimo nel riferimento solidale al muone, allora sarebbe la Terra ad apparire in moto uniforme con velocità $w = 0,999 c$ e pertanto lo spessore dell'atmosfera non risulterebbe più di 10 km, ma contratto dello stesso fattore $\gamma = 22$ e dunque pari a $10000/22 = 450$ m. Allora il tempo necessario alla superficie terrestre per raggiungere il muone è

$$\Delta t = \frac{450}{3 \cdot 10^8} = 1,5 \mu\text{s} \quad (27)$$

e quindi inferiore alla vita media del muone che ovviamente, nel suo riferimento comobile, risulta data dalla (23).

Un altro esempio, di più recente osservazione, riguarda i mesoni π^\pm o *pioni*, che vengono prodotti nelle interazioni nucleari negli acceleratori di particelle e per i quali il parametro di decadimento τ' vale, per un pione in quiete,

$$\tau' = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s.} \quad (28)$$

Se il pione si muove rispetto all'osservatore alla velocità $w = (3/4)c$ della velocità della luce, come usuale per i pioni ottenuti nei ciclotroni, esso dovrebbe percorrere, secondo la previsione classica, una distanza media

$$l' = w \cdot \tau' = \frac{3}{4}(3 \cdot 10^8)(2,6 \cdot 10^{-8}) = 5,85 \text{ m} \quad (29)$$

prima di decadere. Questo contrasta con le osservazioni sperimentali in cui fasci di pioni a questa velocità arrivano a percorrere mediamente una distanza di 8–9 m. Ancora una volta questa differenza è correttamente spiegata in termini relativistici: usando la (18), si trova infatti che, se τ' rappresenta la vita media di un pione a riposo rispetto al sistema del laboratorio, la vita media di un pione osservato nei fasci prodotti in laboratorio e dotati della velocità suddetta risulta

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \frac{2,6 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1 - (3/4)^2}} = 3,9 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

con un fattore di dilatazione di 1,5. Di conseguenza la corretta distanza media percorsa prima di decadere è

$$l = v \cdot \tau = \frac{3}{4}(3 \cdot 10^8)(3,9 \cdot 10^{-8}) = 8,77 \text{ m} \quad (30)$$

in sostanziale accordo con quanto osservato sperimentalmente, ad esempio nel caso in cui il pione lasci una traccia (in quiete rispetto al laboratorio) nel corso del suo moto. Un osservatore solidale con il pione percepirà invece il laboratorio in moto rispetto a lui con velocità v , e pertanto la sua misura della lunghezza di tale traccia non darà come risultato la (30) a causa della contrazione delle lunghezze espressa dalla (19), bensì

$$l' = l\sqrt{1 - w^2/c^2} = 5,85 \text{ m} \quad (31)$$

che coincide con il valore (29) previsto dalla meccanica classica.

1.3 Potere esplicativo della teoria

Mostriamo ora come, con la teoria della relatività, si riescano a spiegare le incongruenze rilevate nella parte iniziale di questa trattazione.

1.3.1 Esperimento di Fizeau

Si prenda in considerazione il tubo inferiore dell'apparato sperimentale dell'esperimento di Fizeau e il segnale di luce trasmesso dal *beam splitter* che propaga con una velocità equiversa a quella dello scorrimento dell'acqua. La velocità della luce rispetto all'acqua è $v = c/n$ (n indice di rifrazione dell'acqua), mentre quella dell'acqua rispetto al laboratorio sia w . Tenendo conto della legge di trasformazione delle velocità relativistica, la velocità v' della luce rispetto al laboratorio è data da:

$$v' = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + w}{1 + \frac{w}{nc}} \approx \left(\frac{c}{n} + w\right) \left(1 - \frac{w}{nc}\right) \approx \frac{c}{n} + w - \frac{w}{n^2} \quad \Rightarrow \quad v' = v + w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = v + w'$$

con

$$w' = w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

ed avendo trascurato i termini del secondo ordine in w/c , poiché $w \ll c$. Considerando i due possibili sensi di propagazione della luce, concorde ed opposto a quello di scorrimento dell'acqua nei due tubi, possiamo riassumere l'espressione per la velocità v' della luce rispetto al laboratorio nel modo seguente

$$v' = \frac{v \pm w}{1 \pm \frac{vw}{c^2}} = v \pm w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = v \pm w'$$

Si spiega così l'effetto di "trascinamento parziale dell'etere" che si ottiene dall'esperimento e si mostra come sia possibile considerare il risultato di questo esperimento come una verifica delle leggi relativistiche di composizione delle velocità.

1.3.2 Esperimento di Michelson e Morley

Sfruttando la relazione per la contrazione delle lunghezze ottenuta precedentemente si riesce a spiegare in modo semplice il risultato nullo dell'esperimento di Michelson e Morley. Il ramo PM_1 dell'interferometro (che si suppone essere lungo L' quando è fermo), essendo parallelo alla velocità w con cui si muove l'apparato sperimentale, per un osservatore "stazionario" si contrae e la sua lunghezza diventa pari a $L'\sqrt{1-\beta^2}$, mentre quella del ramo PM_2 resta invariata, così come t'_2 . Il tempo t'_1 impiegato dal segnale di luce per tornare in P dopo essere stato riflesso da M_2 è perciò pari a

$$t'_1 = t'_{1a} + t'_{1r} = \frac{2L'\sqrt{1-\beta^2}}{c(1-\beta^2)} = \frac{2L'}{c\sqrt{1-\beta^2}},$$

che coincide con t'_2 ricavato in precedenza. Quindi lo sfasamento tra i due segnali che giungono in O' è nullo ($\Delta\phi = 0$). Questo spiega completamente il risultato nullo dell'esperimento di Michelson e Morley.

1.3.3 Forza di Lorentz: un'apparente contraddizione

Il paradosso è insito nella definizione stessa della forza di Lorentz, che dipende esplicitamente dalla velocità della particella soggetta al campo \mathbf{B} , ma non specifica in quale sistema di riferimento deve essere misurata tale velocità. Grazie alla teoria della relatività, si dimostrerà qui di seguito che la definizione della forza di Lorentz è sensata e corretta perché la particella carica immersa in un campo \mathbf{B} risente, in realtà, della medesima forza in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

La contraddizione riscontrata nell'analisi della situazione può essere superata in due modi differenti. Nel primo si tiene conto della dilatazione del tempo e di come varia la densità di carica a seconda

del sistema di riferimento considerato. Nel secondo metodo “risolutivo” si sfruttano le definizioni relativistiche delle componenti del tensore campo ed è più immediato del precedente. Poiché, però, non abbiamo trattato le equazioni per i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , prenderemo in considerazione solo il primo metodo. Nel sistema di riferimento S (quello in cui l’elettrone esterno al conduttore si muove con una velocità v verso l’alto, come riportato in figura), la densità di carica positiva ρ_+ del conduttore è ferma, mentre quella negativa ρ_- (pari a $-\rho_+$, per avere il conduttore neutro) è in movimento con velocità v . Nel sistema S' , solidale con l’elettrone esterno in moto, è la densità di carica negativa ρ'_- ad essere ferma, mentre ρ'_+ si muove con una velocità $-v$ (vedi figura § 1.1.3). Poiché la relazione tra la densità di carica ρ' nel sistema di riferimento dove appare ferma e la densità di carica⁸ ρ nel sistema di riferimento dove si muove con velocità v , è

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\rho'$$

in questo caso particolare si deduce che:

$$\begin{aligned}\rho'_+ &= \gamma\rho_+ \\ \rho_- &= \gamma\rho'_-.\end{aligned}$$

Questo implica che il conduttore, che in S è neutro ($\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$), non lo è più in S' ; infatti

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \gamma\rho_+ + \frac{\rho_-}{\gamma} = \gamma\rho_+ - \frac{\rho_+}{\gamma} = \gamma\rho_+ \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho' = \gamma\rho_+ \frac{v^2}{c^2}$$

dove si è sfruttato $\rho_- = -\rho_+$ e la definizione di γ . Per l’espressione appena ricavata, in un conduttore di sezione A si ha una densità di carica per unità di lunghezza λ' data da

$$\lambda' = \gamma\rho_+ \frac{v^2}{c^2} A$$

che produce un campo elettrico E' . Alla distanza d dall’asse del conduttore, dove si trova l’elettrone, questo campo vale (ricordiamo che $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$):

$$E' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma\rho_+ v^2 A}{c^2 d} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma\rho_+ v^2 A}{d}.$$

Nel sistema di riferimento S' , l’elettrone esterno è quindi soggetto ad una forza F' data da

$$F' = -eE' = -\gamma \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e\rho_+ v^2 A}{d} = \gamma F$$

⁸Una carica infinitesima dq non varia passando da un sistema di riferimento ad un altro, poiché la carica elettrica è invariante, come si osserva sperimentalmente. Scrivendo $dq = \rho dV$, dove ρ è la densità di carica e dV l’elemento di volume, non essendo quest’ultimo un invariante, anche ρ non lo è. Si consideri dq che si muove con velocità v lungo l’asse z di un sistema di riferimento fisso. Indicando con ρ , dV , e ρ_0 , dV_0 la densità di carica e l’elemento di volume, rispettivamente nel sistema di riferimento fisso e in quello solidale con la carica (cioè dove la carica è ferma), vale $dq = \rho dV = \rho_0 dV_0$. Poiché nel sistema di riferimento fisso la dimensione dell’elemento di volume nella direzione del moto è contratta, si ha

$$dV = \frac{dV_0}{\gamma}$$

e quindi

$$\rho = \rho_0 \frac{dV_0}{dV} = \gamma\rho_0.$$

dove F è il modulo della forza di Lorentz che agisce sull'elettrone se si considera il sistema S . Confrontando queste due forze e tenendo conto della dilatazione del tempo ($dt = \gamma dt'$):

$$F' = \gamma F \quad \Rightarrow \quad \frac{dp'}{dt'} = \gamma \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dt'} \quad \Rightarrow \quad dp' = dp.$$

Risulta, così, che l'effetto sull'elettrone esterno al conduttore, cioè la variazione della sua quantità di moto, che è quello che effettivamente si misura in S e S' , è lo stesso nei due sistemi di riferimento. Non si ha quindi alcuna contraddizione, come invece si osservava da una trattazione classica del problema.

1.4 La dinamica relativistica

Discuteremo ora i concetti di energia e quantità di moto relativistici dei corpi; essi sono fondamentali per descrivere la dinamica del moto dei corpi, ovvero quando si tiene conto dell'interazione e degli urti che avvengono tra di essi. Considereremo solo corpi puntiformi per non appesantire la trattazione.

1.4.1 Quantità di moto ed energia relativistica

Se in un sistema isolato di corpi la risultante delle forze esterne che agiscono su di esso è nulla, l'energia e la quantità di moto totale del sistema rimangono costanti nel tempo. Queste leggi di conservazione sono i cardini della meccanica dei corpi puntiformi e valgono in un qualunque sistema inerziale. Occorre però tener presente che sia la quantità di moto che l'energia di un corpo crescono con la sua velocità; si tratta quindi di *grandezze fisiche che dipendono dal sistema di riferimento in cui vengono espresse*. Poiché i sistemi di riferimento inerziali sono collegati tra di loro nella cinematica relativistica dalle trasformazioni di Lorentz, differenti da quelle di Galileo, ne segue che anche le espressioni relativistiche dell'energia e della quantità di moto sono diverse dalle corrispondenti classiche.

Iniziamo ricavando la formula relativistica per la quantità di moto di una particella. Essa permette di mantenere l'idea dell'impulso come quantità di moto, cioè l'idea che \mathbf{p} possa essere definito come prodotto della velocità per la massa del corpo che possiede quella velocità. Per poter far ciò imponiamo le seguenti condizioni.

1. (a) La quantità di moto \mathbf{p} relativa al sistema inerziale K deve avere la direzione della velocità \mathbf{v} (sempre relativa a K) e modulo dipendente solo da v (modulo di \mathbf{v}). Questo deriva dall'isotropia dello spazio: se non fosse vero avremmo una quantità di moto diversa nelle diverse direzioni anche a parità di v .
- (b) Quando \mathbf{v} diventa molto piccola ($v \ll c$) la quantità di moto deve tendere alla formula classica $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$, dove il parametro m_0 viene chiamato *massa a riposo*, come verrà giustificato in seguito.
- (c) In tutti gli urti la quantità di moto deve essere conservata.

Dalla condizione a) segue che, con una funzione $\gamma(v)$ opportuna (che dovremo determinare), si può sempre scrivere

$$\mathbf{p} = m_0 \gamma(v) \mathbf{v} \tag{32}$$

Applicando invece la condizione b) si vede che deve essere

$$\gamma(0) = 1$$

Usiamo ora la legge di conservazione premessa nella condizione c) per determinare la funzione sconosciuta $\gamma(v)$. Siano dati due corpi A e B , aventi la stessa massa a riposo m_0 che hanno velocità relative a K rispettivamente \mathbf{v} e $-\mathbf{v}$ e stanno per entrare in collisione. Si consideri poi un sistema K' che si

muova con velocità w rispetto a K . Supporremo che l'interazione in esame sia totalmente anelastica (nel senso della fisica classica) e venga generato un corpo composto C di massa a riposo M_0 . In relatività è chiaro che M_0 non potrà dipendere dalla velocità con cui il sistema K' trasla rispetto a K , perchè in questa teoria non esistono velocità assolute e comunque il sistema K' è arbitrario. Resta solo la possibile dipendenza da m_0 e da v , dato che non ci sono altre grandezze significative nel problema.

La conservazione della quantità di moto in K è poco istruttiva. Basta che il composto C resti immobile in K perchè la sua quantità di moto finale sia nulla:

$$\mathbf{p} = m_0 \gamma(0) \cdot \mathbf{0}$$

in accordo con la legge di conservazione. Infatti A e B nello stato iniziale hanno quantità di moto uguale ed opposta, grazie alla (32), quindi quantità di moto totale uguale a zero. Così non si ricava nessuna informazione sulle funzioni ignote $\gamma(v)$ e $M_0(v)$ (abbiamo sottointeso la dipendenza di M_0 da m_0). Dobbiamo quindi considerare il punto di vista di un sistema di riferimento diverso: il sistema K' .

La conservazione della quantità di moto in K' si scrive

$$m_0 [\gamma(v'_1) \mathbf{v}'_1 + \gamma(v'_2) \mathbf{v}'_2] = M_0(v) \gamma(w) \mathbf{w} \quad (33)$$

dove abbiamo chiamato $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ le rispettive velocità dei due corpi nel sistema K' . Applicando le leggi di composizione delle velocità e svolgendo i calcoli (che verranno omessi) si ottiene la seguente relazione

$$\frac{\gamma(v'_1)}{1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})/c^2} = \frac{1}{2m_0} M_0(v) \gamma(w). \quad (34)$$

Non abbiamo ancora trovato le funzioni ignote, ma facendo alcune considerazioni saremo in grado di ricavarle.

Ponendo nella (34) $\mathbf{w} = 0$ in ambo i membri, ricordando che $\gamma(0) = 1$ e osservando che per $\mathbf{w} = 0$ si ha $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}$ (K' e K coincidono in questo limite) si ha

$$M_0(v) = 2m_0 \gamma(v). \quad (35)$$

Questa relazione è dedotta in un caso particolare, ma ci dice in tutta generalità che le due funzioni $\gamma(v)$ e $M_0(v)$ coincidono, a parità di argomento, a meno della costante moltiplicativa $2m_0$. Sostituendo la (35) nella (34) si ottiene

$$\frac{\gamma(v'_1)}{1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})/c^2} = \gamma(v) \gamma(w)$$

Questa relazione deve valere in generale, ma possiamo scegliere in essa $\mathbf{v} = -\mathbf{w}$. Dato che in questo caso $v = w$ e $\mathbf{v}'_1 = 0$ ne segue che

$$\frac{1}{1 - w^2/c^2} = [\gamma(w)]^2 \quad \rightarrow \quad \gamma(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}$$

dove abbiamo scartato la radice negativa, perchè $\gamma(0) = 1$. Anche quest'ultima relazione è stata dedotta in un caso particolare, ma ha validità generale. Possiamo quindi dire, in virtù della (32), che una particella di massa a riposo m_0 e velocità \mathbf{v} rispetto ad un sistema inerziale K ha, rispetto allo stesso sistema, la quantità di moto

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (36)$$

Introduciamo la seguente definizione di massa

$$M(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

e notiamo che nel caso $v = 0$ si ha $M(0) = m_0$: ecco giustificato il nome di massa a riposo. In tal modo la quantità di moto può essere riscritta nella forma usuale

$$\mathbf{p} = M(v) \mathbf{v}.$$

Per la massa del composto C si ha

$$M_0(v) = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (37)$$

Evidentemente si ha in generale $M_0(v) > 2m_0$. Nessuno dei corpi incidenti A e B può fornire al corpo C una massa maggiore della propria massa a riposo: qual è quindi il significato fisico di questo eccesso di massa? A questa domanda Einstein dà una risposta semplice e geniale: *l'eccesso di massa può essere interpretato come massa dell'energia cinetica posseduta dalle particelle prima dell'urto.*

Per esprimere la massa dell'energia cinetica di un corpo di massa a riposo m_0 e velocità v possiamo sviluppare il termine relativistico con $v \ll c$:

$$M = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} \right).$$

In prima approssimazione la differenza fra massa relativistica e massa a riposo, che secondo Einstein equivale alla massa del contenuto energetico del corpo, risulta pertanto

$$M - m_0 = \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^4}.$$

Moltiplichiamo ambo i membri per c^2 e otteniamo

$$(M - m_0)c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}.$$

Il primo termine a destra dell'uguale coincide con l'energia cinetica classica, mentre il secondo termine è trascurabile per velocità piccole rispetto a quelle della luce. Questo fatto ci suggerisce di assumere che l'espressione

$$K = (M - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (38)$$

rappresenti l'*energia cinetica relativistica*. Dalla (38) si ricava anche

$$M = m_0 + \frac{K}{c^2}$$

che mostra come la massa di un corpo in moto sia pari alla somma della sua massa a riposo e della massa della sua energia cinetica relativistica. Poiché inoltre l'energia cinetica può sempre trasformarsi

in altre forme di energia, appare del tutto naturale generalizzare il risultato ottenuto, affermando che ad una quantità di energia E è associabile una massa data da

$$M = \frac{E}{c^2}.$$

Perciò, quando forniamo una quantità di energia E ad un corpo, la sua massa aumenta della quantità E/c^2 e, viceversa, quando un corpo cede energia, la sua massa diminuisce della stessa quantità. La relazione precedente può essere scritta nella più nota forma

$$E = Mc^2. \quad (39)$$

In particolare un corpo in quiete di massa a riposo m_0 possiede un contenuto di energia E_0 , detta *energia a riposo*, pari a m_0c^2 . Questa relazione è nota come *equazione di Einstein* e mostra che massa ed energia sono due aspetti di un unico ente fisico. Tale uguaglianza rappresenta una grande unificazione della realtà fisica in quanto *la materia*, nel suo significato più generale (comprendendo anche la luce e le altre forme di energia, secondo il linguaggio della fisica classica), *si manifesta in due aspetti fondamentali*: l'**inerzia**, misurata dalla *massa*, e la **capacità di compiere lavoro**, misurata dall'*energia*, strettamente legate l'una all'altra. In questo modo l'energia cessa di essere un attributo della materia e diventa una realtà fisica autonoma. Alle due leggi classiche della conservazione della massa e dell'energia si sotituisce dunque un'unica legge di conservazione della massa-energia. Per verificarne esattamente la conservazione il sistema deve essere isolato non soltanto rispetto a scambi di materia, ma anche rispetto a scambi di energia.

Riscriviamo la (39) nella seguente forma

$$E = Mc^2 = m_0c^2 + K. \quad (40)$$

Essa ci dice dunque che l'energia totale associata ad un corpo non è data solo dalla sua energia cinetica K , ma include anche una certa quantità di energia associata alla sua massa a riposo m_0 .

La relazione $E = Mc^2$ è tra i risultati più importanti della relatività, sia dal punto di vista concettuale che dal punto di vista applicativo. Consideriamo un sistema di particelle e sia M_i , la somma delle masse a riposo delle particelle costituenti il sistema iniziale, e M_f la quantità corrispondente del sistema finale. Ricordando la definizione di energia cinetica relativistica, siano K_i e K_f le energie cinetiche complessive del sistema iniziale e di quello finale, ottenute anch'esse sommando i contributi delle singole particelle. Si avrà allora in base alla (40) per le energie totali del sistema iniziale e finale $E_i = K_i + M_i c^2$, $E_f = K_f + M_f c^2$. La conservazione dell'energia implica

$$K_f - K_i = (M_i - M_f)c^2.$$

Ciò mostra in generale che la massa a riposo non si conserva: se $M_i > M_f$ la massa mancante, ovvero $M_i - M_f$, si ritrova nel sistema finale sotto forma di energia cinetica; viceversa, se $M_i < M_f$, una parte dell'energia cinetica iniziale viene convertita in massa. Per rendersi conto degli ordini di grandezza, si supponga $\Delta M \equiv M_i - M_f = 1g$; si ha corrispondentemente $\Delta K \equiv K_i - K_f \simeq 9 \cdot 10^{13} \text{ J}$, che è una grandissima quantità di energia.

Questo non significa però che tutta la massa della particella possa essere trasformata in energia; in generale, solo una piccola frazione della massa può venire convertita in energia.

Anche nelle reazioni chimiche che liberano le maggiori quantità di energia, le corrispondenti variazioni di massa tra sistema iniziale e finale risultano troppo piccole per poter essere evidenziate sperimentalmente, anche con la strumentazione oggi disponibile. Si considerino, ad esempio 12 g di carbonio che, reagendo con 32 g di ossigeno, conducono a circa 44 g di anidride carbonica. Le molecole di questa

sono in rapido movimento, e la loro energia cinetica si manifesta sotto forma di calore: dalla reazione si ottengono circa $3,9 \cdot 10^5$ J. Interpretando questa come dovuta interamente alla conversione di una parte della massa iniziale, si avrebbe

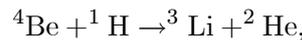
$$\Delta M \equiv M_i - M_f = (K_i - K_f)/c^2 \simeq \frac{3,9 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^{16}} \text{ kg} = 0,43 \cdot 10^{-8} \text{ g}$$

essendo l'energia cinetica delle molecole di ossigeno trascurabile rispetto a quella dell'anidride carbonica, cioè $K_i \ll K_f$. Per verificare l'equivalenza fra massa ed energia in questa reazione, occorrerebbe disporre di bilance in grado di apprezzare una variazione $\Delta M \simeq 0,43 \cdot 10^{-8}$ g rispetto a $M_i = 44$ g, ovvero dotate di una sensibilità dell'ordine almeno di $\Delta M/M_i \simeq 10^{-10}$.

Per trovare un riscontro in natura della equivalenza fra massa ed energia occorre considerare i fenomeni che avvengono a livello subatomico. In essi l'energia viene usualmente espressa in elettronvolt (eV). Un eV è l'energia cinetica acquistata da un elettrone quando esso è accelerato tra due punti che hanno una differenza di potenziale elettrico pari ad 1 V. Essendo la carica dell'elettrone uguale a $1,6021 \cdot 10^{-19}$ C si ha

$$1 \text{ eV} = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Considerando una tipica reazione nucleare



nella quale il protone dell'atomo di idrogeno viene fatto urtare contro il nucleo dell'atomo di berillio, che si frantuma in un atomo di litio ed uno di elio. Le masse degli atomi sono note con grande accuratezza:

$$M_{\text{Be}} = (14,962718 \pm 0,000050) \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

e l'errore percentuale in questo caso è di circa lo 0,0003%. In una singola reazione si ha

$$M_i - M_f = M_{\text{Be}} + M_{\text{H}} - (M_{\text{Li}} + M_{\text{He}}) = 4,02 \cdot 10^{-27} \text{ g}.$$

Essendo $M_i = 16,635982 \cdot 10^{-24}$ g, la diminuzione percentuale di massa risulta essere $\Delta M/M_i \simeq 0,24 \cdot 10^{-3}$, cioè circa cento volte più grande rispetto all'incertezza con cui sono note le masse atomiche. L'energia liberata dalla reazione $(M_i - M_f)c^2 = 2,25$ MeV si trova sotto forma di energia cinetica del litio e dell'elio e risulta in ottimo accordo con il valore sperimentale $K_f - K_i = 2,28$ MeV.

Nella fissione dell'uranio un millesimo della massa viene convertito in energia. Ancor più energetiche sono le reazioni che avvengono all'interno delle stelle. Esse si basano sulla fusione di atomi di idrogeno in elio. Schematicamente i protoni di quattro atomi di idrogeno catturano due elettroni e si fondono in un atomo di elio, pertanto:

$$M_i = 4M_{\text{protone}} + 2M_{\text{elettrone}} = 6,6918 \cdot 10^{-24} \text{ g},$$

mentre $M_f = M_{\text{He}} = 6,647 \cdot 10^{-24}$ g, e si perviene ad una percentuale $\Delta M/M_i \simeq 0,7\%$ di massa convertita in energia. Per ogni singola reazione viene liberato l'ammontare di circa 25 MeV.

1.4.2 Le trasformazioni di Lorentz per energia e quantità di moto

È importante a questo punto stabilire anche come variano l'energia e la quantità di moto di una particella materiale quando si cambia il sistema di riferimento inerziale in cui esse vengono espresse. Ci limiteremo per semplicità ad una trattazione con una sola coordinata spaziale.

Si consideri il riferimento K' in moto con velocità w lungo l'asse spaziale di riferimento K , e si consideri una particella che si muove rispetto K' con velocità v' . Per la legge di composizione relativistica delle velocità, la velocità della particella misurata da K è $v = (v' + w)/(1 + wv'/c^2)$. Indicando con M la sua massa a riposo, l'energia E e la quantità di moto p espresse da K sono

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad p = \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (41)$$

mentre per K' si ha

$$E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - (v')^2/c^2}} \quad p' = \frac{Mv'}{\sqrt{1 - (v')^2/c^2}}.$$

Esprimendo v in funzione di w, v' si può verificare che:

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{\sqrt{(c^2 - w^2) [c^2 - (v')^2]}}{c^2 + wv'}.$$

Dopo alcuni passaggi si ricava

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - (v')^2/c^2}} + w \frac{Mv'}{\sqrt{1 - (v')^2/c^2}} \right)$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{w}{c^2} \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - (v')^2/c^2}} + \frac{Mv'}{\sqrt{1 - (v')^2/c^2}} \right)$$

ove $\beta = w/c$; si ottiene dunque

$$p = \frac{p' + w(E'/c^2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{E}{c^2} = \frac{E' + \frac{w}{c^2} p'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (42)$$

che costituiscono le trasformazioni di Lorentz per energia e quantità di moto nel caso di una sola coordinata spaziale. Per analogia con le trasformazioni di Lorentz possiamo dedurre che la quantità $E^2/c^2 - p^2$ è invariante rispetto alle trasformazioni (42) ovvero

$$\frac{(E')^2}{c^2} - (p')^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \quad (43)$$

come si può verificare svolgendo i calcoli. Ricordando l'espressione di E e di p si ha

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{1}{c^2} \frac{(Mc^2)^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{M^2 v^2}{1 - v^2/c^2} = M^2 c^2$$

ovvero

$$E^2 - c^2 p^2 = (Mc^2)^2. \quad (44)$$

La (44) stabilisce la relazione fra energia e quantità di moto di una particella avente massa a riposo assegnata. In essa non compare la velocità della particella, che pure è esprimibile in funzione di E e di p ; infatti dalle (41) si ha $Ev = c^2 p$, quindi

$$v = c^2 \frac{p}{E} \quad (45)$$

dove v e p sono considerati in valore e segno. Per velocità prossime a c , la variabile velocità non è adatta ad esprimere l'energia di una particella, perchè una piccola variazione di v comporta una notevole variazione di E e di p . Ad esempio, nel caso dell'elettrone, la sua massa a riposo è $M_e = 0,911 \cdot 10^{-27}$ g, quindi $M_e c^2 = 0,511$ MeV; per $v = 0,9987c$ si ha $E = 10$ MeV, mentre per $v = 0,99999987c$, l'energia diventa $E = 1$ GeV. Pertanto è più conveniente riferirsi invece che a v al momento o all'energia, grandezze misurate in maniera diretta.

1.4.3 Particelle prive di massa a riposo

Esistono in natura delle particelle, tipicamente i fotoni, che hanno massa a riposo nulla. Per esse quindi vale:

$$E = c|\mathbf{p}|, \quad |\mathbf{v}| = c \quad (46)$$

La loro energia è interamente cinetica e la velocità pari a c . Ricordandosi che componendo relativisticamente la velocità w con la velocità c della particella si ottiene ancora c , osserviamo che mentre è possibile trovare un riferimento inerziale rispetto al quale una particella con $M > 0$ è ferma, ciò non accade se $M = 0$: la velocità della particella è c in qualsiasi sistema inerziale.

Quando un'onda elettromagnetica di frequenza ν sufficientemente grande interagisce con delle cariche elettriche, la luce si comporta come se fosse costituita da quanti di energia $E = h\nu$ dove $h = 6,6256 \cdot 10^{-34}$ J · s è la costante di Planck. La natura corpuscolare della luce, ipotizzata da Einstein, ha avuto conferme sperimentali decisive e questi quanti di luce non sono altro che i fotoni. Si tratta a tutti gli effetti di particelle di energia

$$E = h\nu \quad (47)$$

che hanno velocità c nel vuoto; per la (45) la loro quantità di moto è

$$|\mathbf{p}| = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (48)$$

e per la (44) sono prive di massa a riposo. Ricordando la relazione fra lunghezza d'onda λ e frequenza: $\lambda = c/\nu$, si ha anche

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad p = \frac{h}{\lambda}. \quad (49)$$

Sviluppriamo questi concetti analizzando un esempio: l'annichilazione di una coppia elettrone-positrone. Un elettrone libero, cioè non legato ad un atomo, ed un positrone possono interagire, annullando le loro cariche elettriche di segno opposto e trasformando tutta la loro massa nell'energia cinetica di due fotoni. L'elettrone e il positrone possono essere supposti fermi nel sistema di riferimento del laboratorio se si ammette che la loro energia cinetica sia trascurabile rispetto alla loro energia a riposo, pari a $0,511$ MeV. L'energia del sistema iniziale è quindi $E_i = 2M_e c^2$, mentre per la quantità di moto si ha $p_i = 0$. Il sistema finale è costituito da due fotoni, le cui frequenze saranno indicate con ν_1, ν_2 e le quantità di moto $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$; per la (47) si ha dunque $E_f = h\nu_1 + h\nu_2$ e la conservazione dell'energia conduce a $2M_e c^2 = h(\nu_1 + \nu_2)$. Poiché la quantità di moto iniziale è nulla, tale dovrà essere anche

$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1$; quindi $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ e i due fotoni emergono, dal punto in cui la coppia elettrone-positrone si è annichilita, in direzioni opposte ma con la stessa quantità di moto. Pertanto, ricordando la (48) deve essere $\nu_1 = \nu_2$ e l'energia di entrambi i fotoni è $M_e c^2$, ovvero la loro lunghezza d'onda è

$$\lambda_0 = \frac{hc}{E} = \frac{h}{M_e c} = 0,02426 \text{ \AA}.$$

2 PARTE SCOLASTICA

Attorno al 1870, proprio nel secolo che vide il trionfo del meccanicismo, si aprì un secondo grande capitolo della fisica: la teoria elettromagnetica, che nacque dallo studio di alcuni fenomeni, noti da tempo, ma non ancora analizzati in modo adeguato, come l'attrazione e la repulsione tra corpi elettrizzati e magneti. Questa teoria causò una crisi nella scienza, che sembrava, tramite le leggi della dinamica e della gravitazione, esser riuscita a chiudere la disputa sul moto e sulle sue cause. L'elettromagnetismo, infatti, sembrava essere incompatibile con uno dei fondamenti della meccanica: il *principio di relatività galileiana*. Solo nei primi anni del '900, Albert Einstein (1879 – 1955) mostrò come il dissidio tra l'elettromagnetismo e la meccanica potesse essere superato rinunciando ai concetti di tempo e spazio assoluti e postulando la costanza della velocità della luce. Nacque così la teoria della relatività, che mise in discussione nozioni che avevano dominato incontrastate il pensiero scientifico e che sconvolse i fondamenti della meccanica classica.

2.1 Esperimenti per rivelare il “vento d'etere”

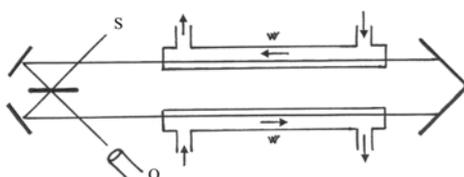
2.1.1 Introduzione

Verso la fine dell'800 i fenomeni dinamici, acustici e termici erano conosciuti e descritti in modo completo dalle leggi di Newton (1642 – 1727), essendo ricondotti al moto di elementi macroscopici o microscopici. I fenomeni ottici, elettrici e magnetici venivano, invece, compendati tramite le equazioni di Maxwell (1831 – 1879), dedotte in modo completo verso il 1870, che prevedevano l'esistenza di onde elettromagnetiche propagantisi alla velocità della luce, di cui, però, non si conosceva nulla sul mezzo di propagazione. Nonostante la contraddittorietà delle proprietà di questo mezzo di propagazione, l'ipotesi della sua esistenza non venne messa in dubbio, ritenendo fuori discussione il fatto che qualsiasi onda necessitasse di un mezzo per propagare. Si riteneva quindi che tutti i mezzi trasparenti (aria, acqua...) fossero permeati di un fluido chiamato etere, che si riteneva essere in quiete rispetto alle stelle fisse.

L'etere sembrava rispecchiare l'idea, sia fisica che filosofica, di spazio assoluto, individuando un sistema di riferimento immobile nel quale i corpi possono essere pensati in senso assoluto in moto o in quiete; permetteva di spiegare in termini meccanici i fenomeni elettromagnetici (l'onda elettromagnetica poteva essere descritta in modo analogo ad ogni altra onda meccanica). Rimaneva, però, il problema della verifica sperimentale dell'esistenza dell'etere. Se quest'ultimo esistesse realmente, la Terra, completamente circondata da esso, ruotando attorno al Sole, si muoverebbe più o meno come un aereo che vola nell'aria ferma. Il nostro pianeta, percorrendo la sua orbita, dovrebbe, quindi, osservare il 'vento d'etere', così come l'aria in moto rispetto all'aereo costituisce un vento. Inoltre misurando la velocità della luce sulla Terra in due direzioni differenti (ad esempio, un segnale di luce viaggia nello stesso verso del moto della Terra e uno perpendicolarmente ad esso), si dovrebbero ottenere due valori diversi per le velocità, a causa del moto relativo del nostro pianeta rispetto ad esso.

2.1.2 Esperimento di Fizeau

Nella seconda metà dell'800 vennero fatti diversi tentativi per rivelare il vento d'etere. Uno tra i più significativi fu eseguito dal fisico francese Armand H. L. Fizeau (1819 – 1896), che, attorno al 1850, fece i primi esperimenti per misurare la velocità di un segnale luminoso che propaga in alcuni tubi contenenti acqua che si muove con velocità w , sfruttando una strumentazione schematizzata nella figura sottostante.



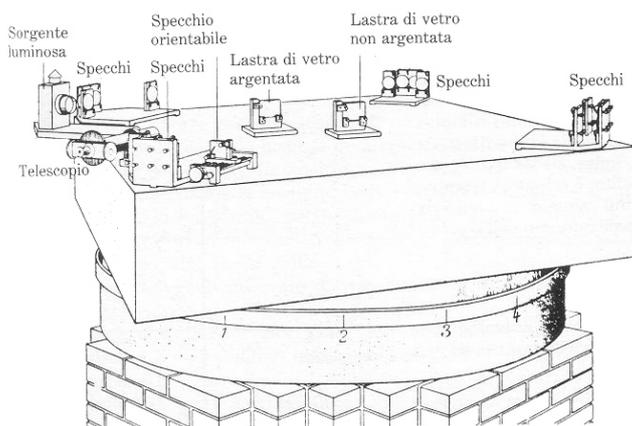
La luce generata dalla sorgente S viene suddivisa, tramite una lamina, in due fasci luminosi che passano, grazie ad un sistema di specchi, in versi opposti attraverso i due tubi in cui scorre l'acqua: un segnale luminoso, quello trasmesso, propaga in senso antiorario (si ha perciò v_a parallela a w , avendo indicato con v_a la velocità della luce nell'acqua), l'altro segnale, quello riflesso, si muove invece in senso orario. Poiché si supponeva che la luce propagasse attraverso l'etere, la velocità di un segnale luminoso rispetto ad un certo osservatore sarebbe dovuta dipendere dalla velocità con cui quest'ultimo si muove rispetto all'etere (di conseguenza la luce si propagherebbe in tutte le direzioni con la stessa velocità solo in un sistema di riferimento in quiete rispetto all'etere). In forza di questo, l'esperimento di Fizeau avrebbe dovuto portare a due possibili risultati. La velocità della luce rispetto al laboratorio avrebbe dovuto essere $v_a + w$, se l'etere veniva trascinato dall'acqua; v_a se l'etere non risentiva del moto dell'acqua. In realtà l'esperimento dava come valore della velocità della luce rispetto al laboratorio un valore compreso tra i due detti in precedenza, come se la velocità di trascinamento dell'etere non fosse w , ma w' , valore ricavabile dalla seguente relazione

$$w' = w \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

dove n è l'indice di rifrazione dell'acqua e il fattore in parentesi viene detto *coefficiente di trascinamento di Fresnel*. Si riaprirono, allora, le discussioni sull'effettiva esistenza dell'etere come mezzo di propagazione della luce e di come i corpi si muovessero in esso.

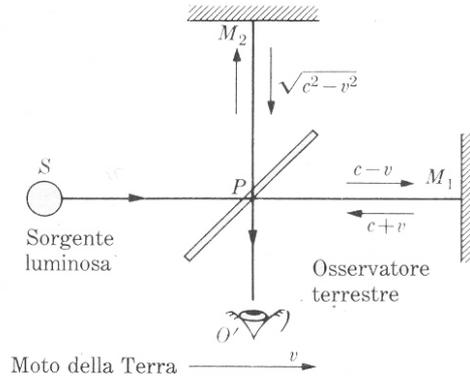
2.1.3 Esperimento di Michelson e Morley

Esperimenti successivi al precedente, atti a verificare il moto della Terra rispetto ad un ipotetico sistema di riferimento privilegiato e quindi a capire come il nostro pianeta si muovesse nell'etere e come questo moto potesse influenzare il valore della velocità della luce, vennero fatti, a partire dal 1879, dallo statunitense Albert Michelson (fisico, 1858 – 1931), in collaborazione con Edward Morley (chimico, 1838 – 1923). Per cercare di stabilire se la Terra fosse in moto rispetto all'etere e se quest'ultimo fosse realmente in quiete rispetto alle stelle fisse, questi due scienziati idearono e sfruttarono un dispositivo sperimentale chiamato interferometro (vedi figura), che permette di misurare la velocità della luce in varie direzioni rispetto al moto terrestre.



Questi esperimenti, ripetuti più volte e perfezionando sempre di più la strumentazione, però, non riuscirono a provare l'esistenza dell'etere, come andremo ora a mostrare, riportandone una descrizione.

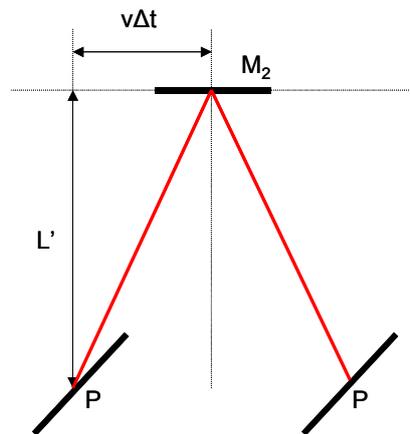
Consideriamo lo schema dell'interferometro di figura.



La sorgente S produce un fascio di luce monocromatica che, incidendo sulla lamina trasparente P , viene suddiviso in due parti: un segnale trasmesso che propaga verso lo specchio M_1 (posto ad una distanza L' da P) e uno riflesso che propaga verso lo specchio M_2 (posto, anch'esso ad una distanza L' da P). Entrambi i fasci vengono riflessi in modo da ripercorrere esattamente il cammino di "andata" per ritornare alla lastra P . Tornato in P , il raggio trasmesso si riflette in O' , sovrapponendosi al raggio riflesso inizialmente, che ora ha oltrepassato la lastra P . I due segnali di luce che raggiungono lo schermo posto in O' , derivando da uno stesso fascio originario, sono coerenti e quindi produrranno delle figure di interferenza. Supponiamo che l'interferometro sia disposto in modo che la sua velocità v (quella della Terra) rispetto all'etere sia parallela al braccio PM_1 . In questa situazione, usando le leggi di composizione della velocità galileiana, il modulo della velocità del segnale di luce trasmesso che viaggia verso M_1 è $c - v$, mentre nel tratto di ritorno, tornando, cioè, verso la lastra P , è $c + v$. Il tempo t'_1 per percorrere $PM_1 + M_1P$ (cioè il tempo di andata e ritorno) è quindi pari a

$$t'_1 = \frac{L'}{c - v} + \frac{L'}{c + v} = \frac{2L'c}{c^2 - v^2} = \frac{2L'/c}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Per il raggio riflesso da P che propaga verso lo specchio M_2 , si ha una situazione diversa in quanto il cammino effettivo, nell'etere immobile, è quello che appare in figura.



Mentre il segnale luminoso propaga verso lo specchio M_2 e poi torna verso la lastra P , il dispositivo sperimentale si muove lungo la direzione perpendicolare e, quindi, dalla geometria della figura precedente, indicando con Δt il tempo impiegato dalla luce per percorrere il tratto tra la lastra P e lo

specchio M_2 , sfruttando il teorema di Pitagora, si ha

$$c\Delta t = \sqrt{L'^2 + v^2\Delta t^2} \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \frac{L'}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Quindi il tempo totale t'_2 impiegato dal raggio riflesso per propagare fino allo specchio M_2 e tornare in P vale:

$$t'_2 = 2\Delta t = \frac{2L'}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Confrontando t'_1 e t'_2 si osserva che sono diversi, mentre, come è ovvio, sarebbero stati uguali se $v = 0$, cioè se la Terra fosse immobile nell'etere.

La differenza tra questi due tempi di percorrenza dovrebbe portare ad una differenza di cammino ottico e di fase che genererebbe delle figure di interferenza sullo schermo posto in O' . Poiché, però, nei risultati compare la quantità v^2/c^2 che è molto piccola, essendo la velocità della Terra relativamente all'etere molto minore della velocità della luce, l'apparato sperimentale deve essere molto sensibile. Difficilmente, però, si riesce ad avere $PM_1 = L' = PM_2$. Per ovviare a questo problema, si può ruotare l'interferometro di 90° in modo che i due bracci del dispositivo siano scambiati. Così facendo, non si analizzerà la figura di interferenza per una posizione fissata dell'interferometro, ma lo spostamento nella figura di interferenza tra una situazione e l'altra. Con tale rotazione si viene a creare, tra i due casi, una differenza pari a $2(t'_2 - t'_1)$ per i tempi di percorrenza dei bracci, equivalente ad una lunghezza $2c(t'_2 - t'_1)$, che dovrebbe dar luogo ad uno spostamento delle frange rispetto alla figura di interferenza iniziale. Tuttavia non si osserva questo spostamento. L'esperimento di Michelson e Morley, ripetuto molte volte nell'arco di anni, in diverse stagioni e ore del giorno (quindi con la strumentazione orientata in modi diversi rispetto alle stelle fisse) non ha mai rivelato alcun cambiamento. Pur ammettendo l'esistenza dell'etere, non si riesce a verificarne il moto rispetto ad un qualunque osservatore. Per spiegare il risultato negativo dell'esperimento di Michelson e Morley furono proposte diverse ipotesi. Vediamo quali.

1. Vicino alla Terra, l'etere viene trascinato dal suo moto, per cui in realtà l'interferometro è in quiete rispetto all'etere, cioè $v = 0$. Tuttavia se ci fosse questo effetto, la luce di una stella arriverebbe sulla Terra sempre dalla stessa direzione, contro il fenomeno dell'aberrazione della luce stellare, scoperto e spiegato fin dal 1825. Inoltre si andrebbe contro i risultati ottenuti dall'esperimento di Fizeau riportato in precedenza.
2. Il fisico irlandese G. F. Fitzgerald, nel 1892, cercò di spiegare il risultato nullo dell'esperimento di Michelson e Morley affermando che il vento d'etere esercita una pressione sui corpi che si muovono attraverso esso, con una velocità v , contraendoli di un fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. In questo modo non si osserva uno spostamento delle frange di interferenza perché il braccio dell'interferometro parallelo alla direzione del moto della Terra si accorcia.
3. Anche H. A. Lorentz suppose una contrazione, ma dovuta al fatto che le forze interatomiche, essendo trasmesse attraverso l'etere, come le onde elettromagnetiche, venivano influenzate dal moto attraverso questo mezzo. Poiché la contrazione agisce allo stesso modo su tutti i corpi, non è direttamente osservabile. Questa ipotesi sembrava in buon accordo con l'idea che la materia fosse costituita essenzialmente da cariche elettriche, lo stesso Lorentz afferma: «*Per quanto l'ipotesi della contrazione possa apparire strana anche a prima vista, si dovrà tuttavia ammettere che essa non è affatto remota se solo si accetta che anche per le forze molecolari l'etere costituisca un tramite, così come possiamo fino ad oggi affermare delle forze elettriche e magnetiche. Se è così, il moto di traslazione molto probabilmente cambierà le azioni reciproche fra due molecole o atomi, così come cambia l'attrazione o la repulsione fra particelle cariche. Ora, poiché la forma e le dimensioni di un corpo solido sono in sostanza dovute all'intensità delle forze molecolari, non potrà non verificarsi anche una variazione delle dimensioni*».

Le formule di contrazione di quest'ultima spiegazione, che cerca di salvare i concetti newtoniani di spazio, di tempo assoluti e l'idea dell'etere come mezzo di propagazione delle onde elettromagnetiche, verranno poi ritrovate da Einstein che ne darà, però, una interpretazione completamente diversa.

Nel 1905 Einstein formulò una teoria che prevedeva queste contrazioni, senza però ridurle a semplici accorciamenti meccanici, ma cambiando i concetti di spazio e di tempo che erano alla base del pensiero scientifico. Questa teoria è detta *Teoria della Relatività* e grazie ad essa si riescono a spiegare gli esperimenti di Fizeau e di Michelson-Morley qui riportati, ma anche altri effetti elettromagnetici o anche il valore della vita media dei muoni che giungono dall'atmosfera.

2.1.4 La forza di Lorentz: un'apparente contraddizione

Prendiamo in considerazione, ad esempio, un fascio di elettroni (raggio catodico) che può essere pensato come una successione di elettroni in moto lungo la medesima traiettoria con una velocità v (quindi il fascio corrisponde ad una corrente rettilinea I) ed è anche equivalente ad un filo uniformemente carico. Sfruttando le definizioni di densità lineare di carica λ e di velocità v , per la corrente di intensità I possiamo scrivere la seguente uguaglianza

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta l} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \lambda v.$$

Tenendo conto di questo risultato e della legge di Biot e Savart, un elettrone posto ad una distanza d dal fascio di elettroni, in moto anch'esso con la velocità v , risente di un campo \mathbf{B} il cui modulo è dato da

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi d},$$

diretto tangenzialmente alla circonferenza di raggio d centrata nel fascio e giacente nel piano ortogonale a quest'ultimo. L'elettrone esterno al raggio catodico è perciò soggetto alla forza di Lorentz \mathbf{F}_L data in modulo da

$$F_L = -evB = -e \frac{\mu_0 \lambda v^2}{2\pi d}.$$

Tale forza ha direzione radiale al fascio di elettroni ed è attrattiva (c'è segno $-$). Oltre a questa forza, inoltre, l'elettrone risente anche di quella elettrica \mathbf{F}_e dovuta alla presenza del campo \mathbf{E} generato dalla densità di carica lineare λ . Per quanto riguarda il modulo si ha

$$F_e = eE = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}.$$

Questa forza ha la stessa direzione di quella precedente, ma verso opposto essendo \mathbf{F}_e attrattiva. In conclusione, sfruttando le leggi dell'elettrodinamica e considerando il sistema di riferimento del laboratorio, che indichiamo con K , nel quale gli elettroni sono in moto con la stessa velocità v , l'elettrone esterno risulta essere sottoposto ad una forza totale \mathbf{F} che ha modulo

$$F = F_e + F_L = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} (1 - \epsilon_0\mu_0 v^2).$$

Analizziamo ora la situazione considerando il sistema di riferimento K' in cui gli elettroni sono in quiete, cioè la loro velocità, che ora indichiamo con v' , è nulla ($v' = 0$). In questo caso l'elettrone che non appartiene al raggio catodico non è soggetto alla forza di Lorentz ($\mathbf{F}'_L = 0$), essendo quest'ultima

proporzionale alla velocità con cui si muove la particella carica. La forza totale \mathbf{F}' , cui è sottoposto l'elettrone, è quindi puramente elettrica:

$$F' = F'_e = \frac{e\lambda'}{2\pi\epsilon_0 d},$$

dove λ' è la densità di carica lineare misurata nel sistema K' .

Utilizzando le trasformazioni di Galileo possiamo passare dal sistema K' a K . Poiché da tali trasformazioni di coordinate spazio-temporali si ha $F' = F$ e $\lambda' = \lambda$, la precedente espressione diventa

$$F = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 d},$$

che è in contrasto con il risultato ottenuto analizzando la situazione dal punto di vista del sistema K . Come nei due esperimenti descritti in precedenza, anche in questo caso c'è qualcosa che non torna. Le trasformazioni di Galileo sono errate? Solo con la teoria della relatività di Einstein si riuscirà a spiegare questa apparente contraddizione.

2.2 La teoria della relatività

2.2.1 Le trasformazioni di Lorentz

Da quanto introdotto ed evidenziato fino a questo punto, risulta quindi evidente che ci si trova costretti ad operare una "scelta": o le trasformazioni di Galileo sono corrette, e quindi sono sbagliate le equazioni di Maxwell (che unificano tutte le leggi dell'elettromagnetismo), oppure sono corrette le equazioni di Maxwell e sbagliate le trasformazioni di Galileo. Infatti, come abbiamo visto, non possono essere valide entrambe: i risultati dell'esperienza di Fizeau e quelli dell'esperienza di Michelson sono inconciliabili con l'ipotesi dell'etere, con la legge di composizione delle velocità e quindi con le trasformazioni di Galileo.

La definitiva soluzione ai problemi sopra riportati venne fornita da Einstein, in un articolo del 1905, in cui viene enunciata quella che a posteriori avrebbe assunto il nome di *teoria della relatività ristretta o speciale* (per distinguerla dalla *teoria della relatività generale*, portata a compimento nel secondo decennio del XX secolo). Il punto di vista di Einstein abolisce completamente la necessità dell'idea di etere come mezzo propagatore delle onde elettromagnetiche e, con esso, il concetto di spazio e tempo assoluti. Veniamo quindi ad illustrare i punti fondamentali dell'approccio einsteiniano e le rivoluzionarie conseguenze a cui porta.

In primo luogo è necessario avere ben chiaro che la teoria della relatività (ristretta) concentra la sua attenzione su di un punto cruciale, ovvero sul principio di *costanza di velocità della luce*. Tutto il resto essa lo prende come già era stato accettato dalla tradizione. Infatti, come afferma esplicitamente lo stesso Einstein:

«La teoria della relatività ristretta non è altro che un adeguamento del concetto di sistema inerziale alla convinzione, maturata con l'esperienza, che la velocità della luce sia costante rispetto ad ogni sistema inerziale». (Albert Einstein, Lettera a Michele Besso n° 22).

Si assume infatti l'esistenza di sistemi di riferimento, che vengono indicati con il termine di *sistemi inerziali*, muniti di un sistema di coordinate spaziali e temporali, aventi la proprietà secondo cui *i corpi non soggetti a forze si muovono rispetto ad essi di moto rettilineo uniforme*. In questo punto non ci si discosta dalla relatività di Galileo, che ipotizza esattamente la stessa cosa. Einstein tuttavia rimase persuaso che **i fenomeni elettromagnetici non privilegiano alcun sistema inerziale**. Citandolo nuovamente:

«Esempi come questo, come pure i tentativi falliti di individuare un qualche movimento della Terra relativamente al “mezzo lumifero” suggeriscono che i fenomeni elettrodinamici, al pari di quelli meccanici, non possiedono proprietà corrispondenti all’idea di quiete assoluta. Essi suggeriscono piuttosto che per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica varranno anche la stesse leggi elettrodinamiche». (Relatività: esposizione divulgativa)

Einstein giunse quindi a postulare che *la luce si propaghi con la medesima velocità c in tutti i sistemi inerziali*. Tale postulato prende il nome di *principio di costanza della velocità della luce* ed è un’ipotesi di natura fisica, riguardante il comportamento degli strumenti di misura nel passaggio (si osservi bene: mediante un movimento non-inerziale) da un riferimento inerziale ad un altro. Sulla base di tale assunto è possibile determinare, dal puro e semplice punto di vista matematico, un insieme di nuove trasformazioni che collegano le osservazioni fatte da due osservatori solidali con due differenti sistemi inerziali. In questa sede non intendiamo dimostrare rigorosamente come si possa dedurre tali trasformazioni, ma ci limitiamo semplicemente ad enunciarle e a commentarle adeguatamente, mettendo bene in luce le **conseguenze rivoluzionarie** a cui portano.

Prendiamo quindi in considerazione due sistemi di riferimento inerziali, che denoteremo con K e K' , dotati rispettivamente di coordinate (x, y, z, t) e (x', y', z', t') , il secondo dei quali trasli con velocità \mathbf{w} rispetto al primo (denoteremo nel seguito con w il modulo di tale vettore velocità). Per semplicità supponiamo che all’istante iniziale le origini O e O' dei due sistemi di riferimento coincidano, e che i rispettivi assi coordinati siano coincidenti ed equiversi. Supponiamo inoltre che il sistema K' trasli lungo l’asse delle x del sistema K con velocità w . Sotto queste ipotesi valgono le seguenti trasformazioni di coordinate, che prendono il nome di trasformazioni di Lorentz.

TRASFORMAZIONI DI LORENTZ – *Se vale il principio di costanza della velocità della luce, allora le trasformazioni di coordinate tra due sistemi inerziali K e K' , di cui il secondo trasli con velocità w lungo l’asse x del primo, sono le trasformazione di Lorentz*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{w}{c^2}x}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \end{array} \right. \quad (50)$$

dove c indica la velocità della luce. Si ha allora necessariamente $w < c$.

Soffermiamoci ora sul risultato appena introdotto e facciamo una prima importante osservazione: la coordinata temporale t' rispetto a K' dipende non solo dalla corrispondente coordinata temporale t rispetto a K , ma anche da quella spaziale x . Vi è quindi una già netta e chiara distinzione dalle trasformazioni di Galileo

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - wt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right.$$

per cui il tempo “scorre” allo stesso modo per tutti i sistemi inerziali ($t = t'$, per qualsiasi valore di t e t'). Per questo motivo Lorentz usava dire che il tempo in K' è *locale*, cioè dipende non solo dalla coordinata temporale in K , ma anche da quella spaziale. Il risultato matematico appena ottenuto appare, ad un’analisi superficiale, un *paradosso*, in quanto afferma che la simultaneità di due eventi non è un dato assoluto, come invece siamo ritenuti a credere in base al senso comune. In realtà

è proprio il concetto di simultaneità assoluta che non ha senso. Per spiegarlo sfruttiamo l'esempio utilizzato da Einstein.

Consideriamo due osservatori: il primo si trova su di una banchina e vede un treno che si muove con velocità uniforme w lungo un binario; il secondo si trova esattamente a metà del treno, in un punto che indichiamo con M' . Supponiamo che nell'istante in cui i due osservatori si trovavano uno di fronte all'altro cadano due fulmini che colpiscono il capo A e la coda B del treno. L'osservatore sulla banchina si verrà dunque a trovare nel punto medio M del segmento AB . Essendo la velocità della luce costante in qualunque sistema di riferimento, l'osservatore sulla banchina vedrà i due lampi colpire il treno esattamente nel medesimo istante, perché la luce impiegherà esattamente lo stesso intervallo di tempo per percorrere i due tratti identici AM e BM che lo separano dalla coda e dal capo del treno. Quando diciamo che la caduta dei due fulmini è simultanea rispetto alla banchina intendiamo quindi che i raggi di luce provenienti da A e B si incontrano nel punto medio M dell'intervallo AB sulla banchina. Ci chiediamo ora se la stessa situazione vale per l'osservatore sul treno. Sia quindi M' il punto medio del segmento AB del treno in moto. Proprio quando l'osservatore sulla banchina osserva i due fulmini (che per lui sono simultanei), l'osservatore M' sul treno si muove con velocità w verso il raggio di luce che proviene da A , mentre corre avanti al raggio di luce che proviene da B . Pertanto l'osservatore sul treno vedrà prima il raggio di luce proveniente dal capo del treno di quello proveniente dalla coda del treno. Tutti gli osservatori che assumono il treno come loro sistema di riferimento debbono perciò giungere alla conclusione che il lampo di luce proveniente da A ha avuto luogo prima del lampo di luce proveniente da B . Si perviene in questo modo al seguente importante risultato: *gli eventi che sono simultanei rispetto alla banchina non lo sono rispetto al treno, e viceversa.*

Siamo quindi portati a concludere che ogni sistema di riferimento ha il suo proprio tempo particolare. *Un'attribuzione di tempo ha quindi significato solo qualora ci venga detto a quale sistema di riferimento tale attribuzione si riferisce.* Ecco quindi il significato profondo del risultato matematico che abbiamo introdotto. Questo è solo il primo di tutta una serie di apparenti paradossi, che ci accingiamo ad illustrare.

2.2.2 Composizione delle velocità

Esprimiamo l'incremento delle variabili (x, y, z, t) ed (x', y', z', t') che individuano la particella in moto rispetto ai due riferimenti K e K' , con velocità v_x parallela agli assi x, x' , e calcoliamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

Essendo

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - w\Delta t}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{w}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \quad (51)$$

sarà allora

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - w\Delta t}{\Delta t - \frac{w}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - w}{1 - \frac{w}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

e dunque, per definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, si otterrà correttamente

$$v'_x = \frac{v_x - w}{1 - \frac{wv_x}{c^2}} \quad (52)$$

e analogamente sarà fatto per ricavare le altre componenti.

Un'alternativa, magari più lunga, ma probabilmente ancora più chiara, può essere sottolineare il fatto che, essendo K e K' due sistemi inerziali, se il moto della particella è descritto dalla legge $x = v_x t$ nel primo riferimento, allora la legge del moto rispetto al secondo osservatore dovrà essere necessariamente $x' = v'_x t'$. E in effetti, assumendo $x = v_x t$ e sostituendolo nella prima delle trasformazioni di Lorentz, si ricava

$$x' = \frac{(v_x - w)t}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}$$

e utilizzando l'inversa della quarta trasformazione per esprimere t otteniamo

$$x' = \frac{v_x - w}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \cdot \frac{t' + \frac{w}{c^2}x'}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \frac{(v_x - w)t' + (v_x - w)\frac{w}{c^2}x'}{1 - w^2/c^2}.$$

Pertanto, raccogliendo a primo membro i termini contenenti x' , otteniamo infine

$$x' = \frac{(v_x - w)t'}{1 - w^2/c^2} \cdot \frac{1 - w^2/c^2}{1 - \frac{wv_x}{c^2}} = \left[\frac{v_x - w}{1 - \frac{wv_x}{c^2}} \right] t'$$

che sarà uguale ad $x' = v'_x t'$ a condizione che v'_x assuma, appunto, l'espressione all'interno delle parentesi quadre.

2.2.3 Spiegazione dell'esperimento di Fizeau

Vediamo come i risultati appena ottenuti permettano di spiegare l'esperimento di Fizeau. Consideriamo il segnale di luce proveniente dalla sorgente S trasmesso dalla lamina, che propaga con una velocità v_a equiversa a quella w di scorrimento dell'acqua in uno dei due tubi. Tenendo conto della legge relativistica di composizione delle velocità e che $v_a = c/n$ (con n indice di rifrazione dell'acqua), la velocità v'_a della luce rispetto al laboratorio è data da:

$$v'_a = \frac{v_a + w}{1 + \frac{v_a w}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + w}{1 + \frac{w}{nc}} \simeq \left(\frac{c}{n} + w \right) \left(1 - \frac{w}{nc} \right) \simeq \frac{c}{n} + w - \frac{w}{n^2} \Rightarrow v'_a = v_a + w \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = v_a + w'$$

con $w' = w \left(1 - 1/n^2 \right)$ ed avendo trascurato dei termini poiché $w \ll c$. Nel caso si consideri il segnale di luce che propaga in senso opposto a quello di scorrimento dell'acqua, si ottiene

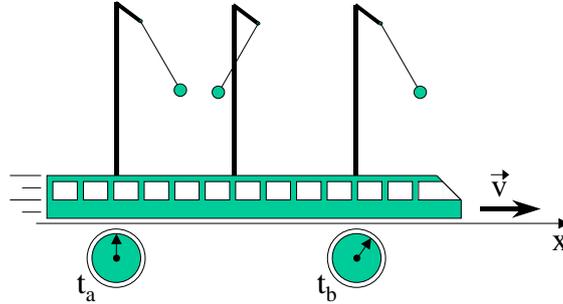
$$v'_a = \frac{v_a - w}{1 - \frac{v_a w}{c^2}} = v_a - w \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = v_a - w'$$

Grazie alla teoria della relatività si spiega così l'effetto di "trascinamento parziale dell'etere" che si ottiene dall'esperimento di Fizeau e l'origine del *coefficiente di trascinamento di Fresnel*. È importante osservare come il risultato di questo esperimento possa essere considerato una verifica diretta delle leggi relativistiche di composizione delle velocità.

2.2.4 Dilatazione dei tempi

Prendiamo ancora in considerazione due sistemi di riferimento K e K' , e supponiamo che due eventi A e B accadano nello stesso punto x' , ma in due istanti differenti t'_a e t'_b relativamente all'osservatore O' solidale con K' . Ad esempio A e B siano due passaggi consecutivi di un pendolo per uno stesso

punto, sicchè $\Delta t' = t'_b - t'_a$ non è altro che il *periodo* di oscillazione del pendolo misurato da un osservatore O' ; pendolo ed O' si trovano entrambi su di un treno in moto a velocità costante lungo un binario rettilineo. La domanda che ci facciamo è: per un osservatore O che osservi il pendolo dai binari, rispetto al quale perciò il treno si muova di moto rettilineo uniforme, quanto varrà il periodo del pendolo ossia l'intervallo di tempo $\Delta t = t_b - t_a$ tra i due eventi A e B ?



Alla luce della discussione sulla relatività della simultaneità, dovremmo aver imparato a non confidare troppo nell'aspettativa comune che i due periodi siano identici! In effetti, la trasformazione inversa (cfr. (50)) spiega che i due eventi, rispetto all'osservatore O , hanno luogo negli istanti

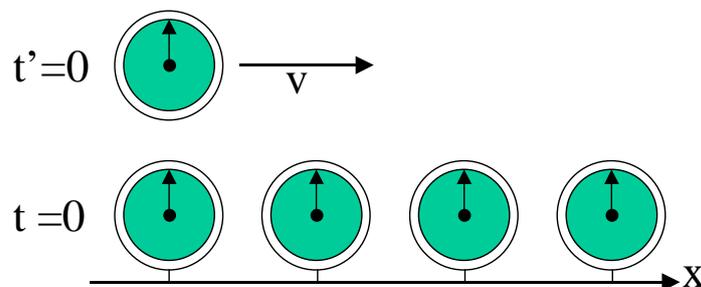
$$t_a = \frac{t'_a + x'_a w/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \quad t_b = \frac{t'_b + x'_b v/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (53)$$

Tenendo conto che, per ipotesi, $x'_a = x'_b$, si ottiene

$$t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{1}{\gamma} \Delta t' \quad (54)$$

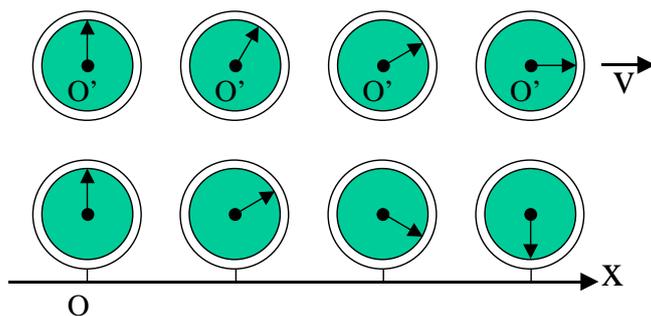
ed essendo il denominatore sempre minore di 1, la (54) ci dice che per l'osservatore O posto nel sistema K , l'intervallo di tempo $t_b - t_a$ tra due eventi che si verificano nel sistema K' è maggiore dell'intervallo di tempo $t'_b - t'_a$ tra gli stessi eventi misurato dall'osservatore O' rispetto al quale si verificano nello stesso punto. Non ha pertanto senso chiedersi quale sia la "vera" durata dell'intervallo di tempo, perchè essa presenta un valore differente per ogni sistema di riferimento, assumendo il valore minimo in quel particolare sistema in cui il fenomeno è visto in quiete. Il tempo misurato in tale sistema è detto *tempo proprio* per quel fenomeno.

Questo significa allora che, se disponiamo lungo l'asse x del riferimento K una successione di orologi identici e sincronizzati tra di loro e ipotizziamo che anche l'orologio solidale al riferimento K' sia identico agli altri, allora, anche se lo sincronizzassimo con il primo orologio della successione nel momento in cui le loro posizioni coincidono



quando per effetto del moto verrà a sovrapporsi con il 2°, il 3°, il 4°, ... orologio del riferimento K ,

apparirà progressivamente sempre più in ritardo.



Quanto detto e rappresentato in figura sembra dar luogo a un paradosso: infatti l'osservatore O' potrà a sua volta constatare il progressivo ritardo del proprio orologio rispetto a quelli stazionari rispetto a K (per confronto diretto nel momento in cui essi passano vicino al suo orologio); e sembra allora naturale concludere che uno dei due sistemi sia realmente “in quiete” e l'altro “in moto”, contro il principio di relatività ed il fatto che rispetto ad O' sono gli orologi di K ad essere in moto, e dunque sarebbe naturale attendersi che anche le sue osservazioni presentassero una dilatazione dei tempi degli orologi di K rispetto al proprio.

La spiegazione del paradosso sta nel fatto che, come abbiamo visto, la simultaneità e dunque la sincronizzazione sono concetti relativi al sistema di riferimento: mentre un osservatore O constata il progressivo ritardo dell'orologio di O' rispetto ai propri orologi sincronizzati e identici, O' non ha alcuna ragione di ritenere che gli orologi del sistema K siano sincronizzati: ricordando la procedura di sincronizzazione (descritta in § 1.2.1), si comprende infatti che, dal punto di vista di O' , gli orologi della successione nella prima figura non apparirebbero affatto sincronizzati, sicchè le osservazioni della seguente figura non costituirebbero, per lui, un confronto tra il proprio tempo ed il tempo del sistema K .

Per riuscire ad effettuare tale confronto dovrebbero essere scambiati gli orologi: se ne dovrebbe considerare uno solo in quiete rispetto a K da confrontare con due o più orologi sincronizzati dislocati in K' . E in questo caso, effettivamente, questi ultimi constateranno un rallentamento dell'orologio di K , in perfetta simmetria e in accordo con la dilatazione dei tempi.

2.2.5 Contrazione delle lunghezze

Dopo aver confrontato la durata di un fenomeno valutata da osservatori diversi, ci chiediamo ora se anche le lunghezze degli oggetti, o le distanze fra due punti, subiscano qualche cambiamento nel passaggio dall'uno all'altro osservatore, diventando anch'esse concetti relativi al sistema di riferimento scelto.

A tale scopo consideriamo un oggetto qualunque, purché sia rigido, perché eventuali variazioni della sua lunghezza non possano essere attribuite all'applicazione di forze o momenti: ad esempio consideriamo un treno di estremi A, B che si muova a velocità costante w lungo un binario rettilineo. L'obiettivo è confrontare la sua lunghezza misurata da un passeggero K' (rispetto al quale il treno appare fermo) con quella misurata da un secondo osservatore K che si trovi “a terra”, accanto ai binari. Quest'ultima misura può essere effettuata in due modi diversi: misurare la distanza fra due punti dei binari a cui, in un certo istante, l'osservatore “a terra” vede sovrapporsi i due estremi del treno, oppure misurare l'intervallo di tempo fra il passaggio dei due estremi del treno per uno stesso punto dei binari (ad esempio il passaggio di fronte al punto in cui si trova tale osservatore) e poi ricavare la lunghezza del treno dalla legge del moto uniforme, essendo nota la sua velocità.

Identifichiamo il percorso dei binari con l'asse x del riferimento K , in modo che la direzione del moto del treno sia parallela a tale asse, e disponiamo anche l'asse x' del riferimento K' (il riferimento del treno) parallelamente ad esso. Gli estremi del treno in K' abbiano le coordinate fisse $x'(A) = x'_a$, $x'(B) = x'_b$ rispettivamente. La lunghezza del treno misurata in K' è perciò data da $L' = x'_b - x'_a$.

Questa la chiameremo *lunghezza a riposo* o semplicemente *lunghezza del treno*. Seguendo l'esposizione divulgativa di Einstein, scattiamo una "istantanea" del treno dal sistema "stazionario" K . Questo permette di individuare contemporaneamente (dal punto di vista di K) i due punti del binario x_a, x_b a cui si sovrappongono i due estremi del treno. In questo modo l'osservatore "appiedato" K potrà definire come lunghezza del treno $L = x_b - x_a$ dove, come detto, le misure dei due estremi sono effettuate allo stesso istante t .

Allora, la prima delle trasformazioni di Lorentz fornisce la relazione fra le due coppie di coordinate

$$\begin{cases} x'_a = \frac{x_a - wt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \\ x'_b = \frac{x_b - wt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \end{cases}$$

che, come detto, risultano indipendenti dal tempo t' in quanto il treno appare fermo rispetto a K' . Risolte in x_a e x_b forniscono quelle che possono essere interpretate come le equazioni del moto degli estremi del treno in K , in quanto x'_a e x'_b sono due numeri fissi

$$\begin{cases} x_a = wt + x'_a \sqrt{1 - w^2/c^2} \\ x_b = wt + x'_b \sqrt{1 - w^2/c^2}. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni, il termine contenente il tempo si elimina e resta la relazione che esprime la lunghezza del treno in K

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - w^2/c^2} \quad \implies \quad L = L' \cdot \gamma. \quad (55)$$

Dunque, poiché $w < c$, risulta sempre $L < L'$, ossia il treno appare contratto nella direzione del moto se guardato da un sistema rispetto al quale risulta in movimento. Per $w \rightarrow c$ risulta $L \rightarrow 0$, mentre per $w \ll c$ si è ricondotti al caso classico, in cui la lunghezza di un oggetto risulta indipendentemente dal sistema di riferimento dell'osservatore.

Se avessimo invece provato a confrontare la larghezza o l'altezza del treno nei due riferimenti, avremmo trovato che rimangono invariate; in generale, considerando la distanza tra due punti la cui retta congiungente sia perpendicolare alla direzione del moto ossia alla velocità w , essa coincide con la distanza valutata da un osservatore rispetto al quale tali punti restano in quiete, come risulta dalla 2^a e 3^a trasformazione di Lorentz.

Evidentemente entrambi gli osservatori possono fare delle istantanee, ciascuno relativamente al suo proprio tempo. Immaginiamo ora che l'osservatore K si trovi su un secondo treno, disposto e fermo su binari paralleli ai primi; in tal caso egli può fotografare il treno precedente, ad esempio nell'istante $t = 0$, e valutarne la lunghezza. Così l'osservatore K' può scattare dal suo riferimento una fotografia del secondo treno, nel suo tempo $t' = 0$. In tal caso, nel caso in cui i due treni risultassero lunghi uguali nel momento in cui entrambi si trovavano fermi alla stazione, i due osservatori riterranno contratto (e dello stesso fattore) l'altro treno, in accordo con il principio di relatività. L'asimmetria per cui, fotografando lo stesso treno, solo a uno dei due osservatori esso si presenta accorciato è semplicemente dovuta al fatto che esso appare fermo rispetto a uno solo dei due sistemi di riferimento.

2.2.6 Spiegazione di Michelson-Morley

Per spiegare in modo semplice il risultato nullo dell'esperimento di Michelson e Morley è sufficiente applicare la relazione per la contrazione delle lunghezze ottenuta precedentemente. Il braccio PM_1 dell'apparato sperimentale (che si suppone essere lungo L' quando è fermo), essendo parallelo alla velocità w dell'interferometro, per un osservatore "stazionario" si contrae e la sua lunghezza diventa

pari a $L'\sqrt{1-w^2/c^2}$, mentre quella del ramo PM_2 resta invariata, così come t'_2 . Il tempo t'_1 impiegato dal segnale di luce per tornare in P , dopo essere stato riflesso da M_2 , è perciò pari a

$$t'_1 = t'_{1a} + t'_{1r} = \frac{2L'\sqrt{1-w^2/c^2}}{c(1-w^2/c^2)} = \frac{2L'}{c\sqrt{1-w^2/c^2}},$$

che coincide con t'_2 ricavato in precedenza. Non essendoci, quindi, alcuna differenza tra i tempi di percorrenza dei rami dell'interferometro ($t'_2 - t'_1 = 0$), i due segnali che giungono in O' non sono sfasati tra loro. Questo spiega completamente il risultato nullo dell'esperimento di Michelson e Morley, cioè il fatto che non si osserva alcuno spostamento delle frange di interferenza ruotando l'apparato sperimentale di 90° .

2.2.7 Spiegazione dell'apparente contraddizione nella forza di Lorentz

Ritornando a quanto detto nel § 2.1.4, prendiamo in considerazione i due sistemi di riferimento K e K' ; nel primo gli elettroni del raggio catodico e quello esterno si muovono con la stessa velocità v , nel secondo sono in quiete. In essi valgono le seguenti definizioni di forza e di densità lineare di carica

$$\begin{aligned} F &= \frac{\Delta p}{\Delta t} & \lambda &= \frac{\Delta q}{\Delta l} \\ F' &= \frac{\Delta p'}{\Delta t'} & \lambda' &= \frac{\Delta q'}{\Delta l'} \end{aligned}$$

dove Δp e $\Delta p'$ indicano la variazione (del modulo) della quantità di moto dell'elettrone in direzione trasversale rispetto al fascio, mentre Δq e $\Delta q'$ esprimono la quantità di carica presente in un tratto di lunghezza, rispettivamente, Δl e $\Delta l'$ del raggio catodico. Sfruttando la relazione per la contrazione delle lunghezze che abbiamo ricavato dalle trasformazioni di Lorentz, per la densità lineare di carica si ha

$$\lambda' = \frac{\Delta q'}{\Delta l'} = \frac{\Delta q'}{\frac{\Delta l}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} = \frac{\Delta q' \sqrt{1-v^2/c^2}}{\Delta l} = \lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\Delta q' = \Delta q$, che deriva dall'invarianza relativistica della carica elettrica, cioè una carica elettrica assume lo stesso valore rispetto a tutti gli osservatori inerziali. Non dimostriamo questa affermazione, ma osserviamo che se questo non fosse vero, la forza elettrica ($F = qE$) agente su una carica in moto potrebbe essere diversa da quella nel caso in cui la carica fosse ferma. Questo non accade, come si può dedurre, ad esempio, considerando un filo percorso da corrente: qualsiasi sia la corrente che lo attraversa, esso non produce alcun campo elettrico e non è sottoposto ad alcuna forza elettrica perché la carica degli elettroni, che sono in moto, è esattamente uguale ed opposta a quella dei protoni, che sono fermi.

Considerando la relazione per la dilatazione dei tempi, per la forza F' possiamo scrivere

$$F' = \frac{\Delta p'}{\Delta t'} = \frac{\Delta p'}{\Delta t \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{F}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

avendo sfruttato l'uguaglianza $\Delta p' = \Delta p$ (che dimostreremo nel § 2.5.1) e la definizione di F . Sostituendo questa relazione e la precedente per λ' nell'espressione di F' ricavata nel § 2.1.4, si ha

$$F = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} (1 - \epsilon_0\mu_0 v^2)$$

che coincide con l'espressione per F ottenuta sfruttando le leggi dell'elettrodinamica nel § 2.1.4, se si ha $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$, come è corretto. In tal modo, utilizzando le trasformazioni di Lorentz, abbiamo ottenuto l'espressione della forza \mathbf{F} che agisce sull'elettrone in moto senza dover introdurre il concetto di campo magnetico. Con la fisica relativistica si mostra che tale effetto è dovuto alla dilatazione dei tempi e alla contrazione delle lunghezze: l'effetto magnetico è un puro fenomeno relativistico, in quanto un osservatore può giudicare "elettrica" una forza che è giudicata "elettrica e magnetica" da un altro osservatore. Questo mostra la "potenza" della teoria della relatività.

Tutto questo può, però, sconvolgere uno studente che collega la teoria della relatività unicamente a quegli eventi in cui compaiono velocità vicine a quelle della luce. In un raggio catodico, effettivamente, gli elettroni possono essere caratterizzati da velocità molto elevate e quindi il discorso fatto non sarebbe poi così "sconvolgente". In un filo percorso da una certa corrente I , ad esempio, gli elettroni di conduzione possono avere, invece, velocità basse, e quello che rende osservabile macroscopicamente il campo magnetico prodotto dal filo è il fatto che il numero degli elettroni è dell'ordine del numero di Avogadro e quindi molto elevato.

2.3 Conferme sperimentali

La dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze non sono osservabili nei fenomeni che cadono sotto i nostri sensi perchè le velocità coinvolte sono molto inferiori a quella della luce. Tuttavia hanno ricevuto numerose conferme sperimentali nell'ambito dello studio delle particelle elementari, che possono viaggiare a velocità confrontabili con quelle della luce, naturalmente o per accelerazione indotta.

La prima corroborazione storica della teoria della relatività in relazione alla dilatazione dei tempi ha riguardato il tempo di vita medio dei *muoni*: si tratta di particelle subatomiche prodotte naturalmente nell'alta atmosfera dallo scontro di particelle del vento solare con i nuclei degli atomi di gas rarefatti, e che decadono dopo un tempo τ' , detto "*vita media*", il cui valore sperimentale è, per un muone in quiete,

$$\tau' = 2,197 \mu\text{s}. \quad (56)$$

Osservando allora un fascio di muoni che viaggiano a velocità dell'ordine di quella della luce, secondo la teoria newtoniana la distanza percorsa nell'arco di tempo previsto dovrebbe essere data da

$$l' = c \cdot \tau' \simeq 660 \text{ m} \quad (57)$$

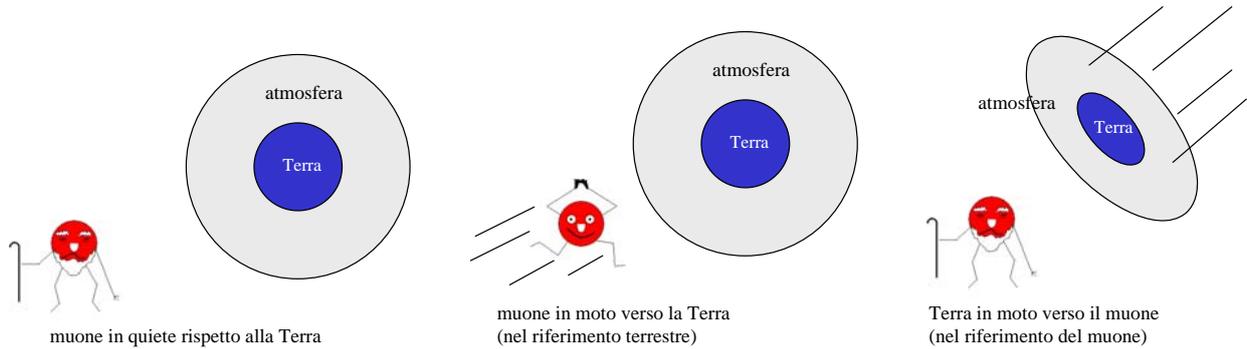
e quindi il fascio dovrebbe sostanzialmente esaurirsi negli strati alti dell'atmosfera. Al contrario, si riesce a rivelare un gran numero di muoni che riescono a raggiungere la bassa troposfera (il cui spessore è di circa dieci chilometri). Questo risulta spiegabile solo in termini relativistici, proprio come effetto della dilatazione dei tempi: se ad esempio la velocità dei muoni è $v = 0,999 c$, la (54) prevede infatti che il fattore di dilatazione assuma il valore

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 22$$

Pertanto il muone può percorrere mediamente una distanza di

$$l = v \cdot \tau = v \cdot \gamma \cdot \tau' \simeq 14,5 \text{ km} \quad (58)$$

prima di decadere, in sostanziale accordo con quanto osservato.



- a) Muone in quiete rispetto alla Terra: $\tau_{vita} = 2.197 \mu s$, $l_{atm} = 10 \text{ km}$;
- b) Muone in moto rispetto al riferimento terrestre: $\tau_{vita} = 48.334 \mu s$, $l_{atm} = 10 \text{ km}$;
- c) Terra in moto rispetto al riferimento del muone: $\tau'_{vita} = 2.197 \mu s$, $l'_{atm} = 450 \text{ m}$.

Come rappresentato simbolicamente in figura, l'esempio del muone può anche essere visto come una conferma della contrazione delle distanze. Se infatti ci mettessimo nel riferimento solidale al muone, allora sarebbe la Terra ad apparire in moto uniforme verso il muone con velocità $v = 0,999 c$, e pertanto lo spessore della troposfera non risulterebbe più di 10 km ma contratto dello stesso fattore $\gamma = 22$ e dunque pari a $10000/22 = 450 \text{ m}$. Allora il tempo necessario alla Terra per raggiungere il muone sarebbe

$$\Delta t = \frac{450}{3 \cdot 10^8} = 1,5 \mu s \quad (59)$$

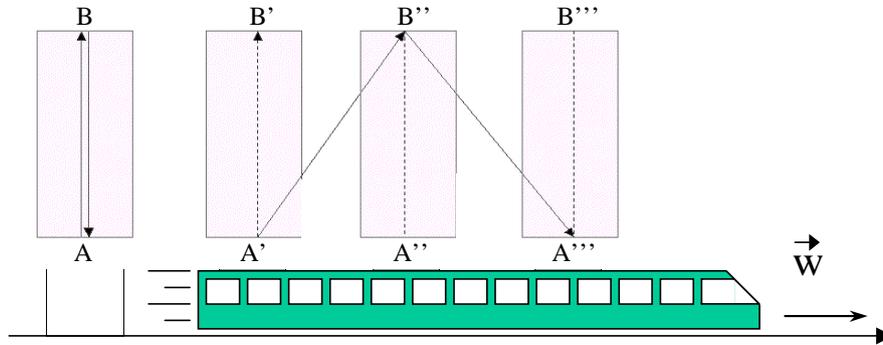
e quindi inferiore alla vita media del muone (che ovviamente, nel suo riferimento comobile, risulta data dalla (56)).

2.4 Relativismo e spazio-tempo

Come si è visto, è stata fatta la scelta di non inserire la deduzione delle trasformazioni di Lorentz nella trattazione di livello liceale. Piuttosto, il punto chiave per il passaggio dalle trasformazioni di Galileo a quelle di Lorentz è *l'introduzione del principio di costanza della velocità della luce*, e ci sembra che sia utile sottolineare in classe come proprio "alla luce" di questo principio trovino un senso anche le deduzioni apparentemente inaccettabili, perché molto lontane dal senso comune oltre che dagli insegnamenti della fisica classica, dell'abolizione dei concetti di spazio e di tempo assoluti. Per questo motivo riteniamo opportuno mostrare agli studenti, come fatto per la relatività della simultaneità, che anche la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze discendono da questo principio senza bisogno di ricorrere alle trasformazioni di Lorentz. E sottolineare infine come la sorpresa, il disagio di fronte al relativismo filosofico apparentemente imposto da queste conclusioni nasca in realtà da un errore di partenza: siamo noi a sbagliare immaginando il tempo e lo spazio come grandezze separate, mentre «*la realtà è essenzialmente cronotopica*» (Minkowski). E tenendo fede alla scelta espressa all'inizio, pensiamo sia possibile farlo senza dover necessariamente introdurre la spazio-tempo quadridimensionale e senza definirne la metrica pseudo-euclidea.

Vogliamo mostrare come, in effetti, tutto discenda proprio dall'aver adottato il principio di costanza della velocità della luce, e per farlo ricaveremo le (54), (55) senza bisogno di ricorrere alle trasformazioni di Lorentz. In effetti, mentre nell'interpretazione di Lorentz (vedi § 2.6.1) la contrazione e la dilatazione relativistiche sono fenomeni materiali riguardanti proprietà dell'etere, secondo Einstein sono una conseguenza della relatività dei procedimenti sperimentali di misura, a sua volta direttamente conseguente dalla costanza della velocità della luce nel vuoto.

Abbiamo già visto (§ 2.2.1) come Einstein dimostrò illusorio il principio dell'assolutezza della contemporaneità degli eventi fisici rispetto a tutti i sistemi di riferimento con il ragionamento dell'*orologio a luce*. Si dice *orologio a luce* quello che calcola il tempo attraverso la riflessione di un raggio di luce fra due specchi piani e paralleli. Dati due orologi simili e ben sincronizzati in quiete, la partenza dei raggi di luce, la loro riflessione e la loro percezione saranno eventi contemporanei. Ma se uno dei due si muove rispetto all'altro, ad esempio su un treno con velocità uniforme w , che cosa accade?



Consideriamo l'orologio sul treno. Per l'osservatore solidale con l'orologio, diciamo nel sistema K' , il raggio di luce continua a riflettersi fra i due specchi, perpendicolarmente ad essi. Ma per un osservatore del sistema "stazionario" K , il moto del raggio di luce si compone con quello traslatorio dell'orologio, e si ha la traiettoria diagonale della figura: non più AB , ma $A'B''$ e $B''A'''$. Se anziché un raggio di luce venisse inviata una pallina, per l'osservatore K' che sta sul treno, la pallina si muove con velocità v' , percorre un tratto l' e torna al punto di partenza dopo un tempo $t' = l'/v'$. Per l'osservatore K che sta a terra e che utilizzi le trasformazioni di Galileo, la pallina si muove con velocità $v = \sqrt{v'^2 + w^2}$, percorre una distanza pari a $l = \sqrt{l'^2 + (wt)^2}$ impiegando un tempo $t = l/v$. Con un po' di algebra⁹, si dimostra che $t = t'$, cioè entrambi gli osservatori vedono la pallina ritornare in basso allo stesso istante, perché l e v sono aumentati nello stesso rapporto rispetto a l' e v' . Inviando invece un raggio di luce, e sotto l'ipotesi che la velocità c della luce sia la stessa rispetto al treno in moto e rispetto a terra, si trova che $t' < t$, essendo $AB = A'B'' < A'B''$ (il cateto è minore dell'ipotenusa) ed essendo la velocità della luce costante in ogni sistema di riferimento; risulta

$$A'B'' = ct, \quad A'B'' = ct', \quad A'A'' = wt \quad (60)$$

e per il teorema di Pitagora

$$(A'B'')^2 = \sqrt{(A'B'')^2 + (A'A'')^2} \quad (61)$$

o, in altri termini,

$$c^2 t^2 = c^2 t'^2 + w^2 t^2$$

⁹Si ha

$$t^2 = \frac{l^2}{v^2} = \frac{l'^2 + w^2 t^2}{v'^2 + w^2}$$

Riunendo a primo membro i termini contenenti t , si ottiene

$$t^2 - \frac{w^2}{v'^2 + w^2} t^2 = \frac{l'^2}{v'^2 + w^2}$$

da cui

$$t^2 \left(\frac{v'^2}{v'^2 + w^2} \right) = \frac{l'^2}{v'^2 + w^2}$$

e quindi

$$t^2 = \frac{l'^2}{v'^2} = t'^2.$$

cioè

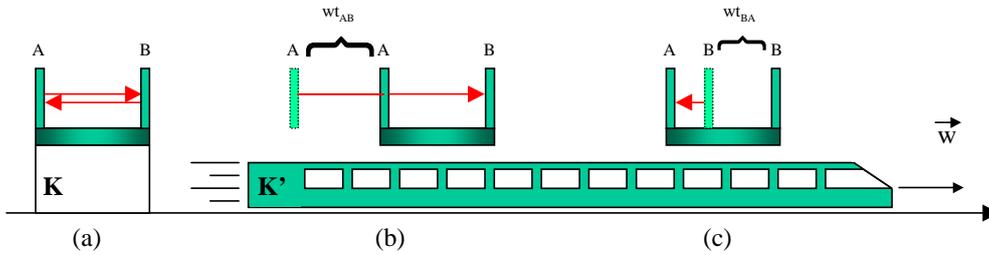
$$(c^2 - w^2)t^2 = c^2 t'^2.$$

Con facili passaggi algebrici, si ricava infine

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \frac{t'}{\gamma} \quad (62)$$

che coincide con la (54), che avevamo ricavato ricorrendo alla 4^a trasformazione di Lorentz.

Allo stesso modo, Einstein è costretto a far crollare anche il mito dell'inalterabilità delle lunghezze. Come già accennato, lunghezza e tempo sono correlate in quanto uno dei modi in cui può essere misurata la lunghezza di un'asta in movimento è misurare l'intervallo di tempo tra il passaggio degli estremi dell'asta per uno stesso punto e poi ricavarne la lunghezza dalla legge del moto uniforme. In alternativa si può far partire un raggio di luce da uno dei suoi estremi quando passa davanti ad un osservatore, e misurare il tempo che la luce impiega per andare da un'estremità all'altra (evidentemente dotate di specchi). Dato che la durata degli intervalli di tempo dipende dal sistema di riferimento in cui vengono misurati, e che la contemporaneità stessa di due eventi è stata messa in discussione, non siamo più sicuri che le lunghezze così misurate siano assolute!



Consideriamo un'asta sulla quale è posto un orologio a luce: si può misurare la sua lunghezza calcolando il tempo t di riflessione del raggio di luce tra gli specchi A, B posti ai suoi estremi, e poi utilizzando la semplice formula $L = ct/2$ (figura a). Se però l'asta si muove nel sistema di riferimento K' , nell'andata il raggio di luce percorrerà in tutto un tratto più lungo rispetto a prima (figura b). Detto t_{AB} il tempo occorrente per l'osservatore K perché il raggio di luce raggiunga lo specchio B , in tale tempo la luce avrà percorso una distanza ct_{AB} che sarà uguale alla somma della lunghezza dell'asta più il cammino aggiuntivo causato dal suo spostamento:

$$ct_{AB} = L + wt_{AB} \quad (63)$$

(L è la lunghezza dell'asta in K rispetto al quale essa è in moto, e pertanto non è ancora nota). Invece quando il raggio di luce torna indietro, il tempo occorrente a raggiungere lo specchio B sarà detto t_{BA} , e in tale tempo la luce coprirà una distanza ct_{BA} pari alla lunghezza dell'asta meno il tratto di cui lo specchio A è avanzato verso B (figura c):

$$ct_{BA} = L - wt_{BA}. \quad (64)$$

Dalla (63) e dalla (64) ricavo t_{AB} e t_{BA} :

$$t_{AB} = \frac{L}{c - w} \quad t_{BA} = \frac{L}{c + w}$$

e allora il tempo complessivo t di riflessione del raggio di luce, valutato dall'osservatore K , è dato da

$$t = t_{AB} + t_{BA} = \frac{2cL}{c^2 - w^2}$$

da cui

$$L = \frac{t}{2c}(c^2 - w^2) = \frac{ct}{2} \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right).$$

Se in quest'ultima, al posto di t inserisco la (62) esprime la dilatazione dei tempi, ricavo

$$L = \frac{ct'}{2} \sqrt{1 - w^2/c^2}$$

Ma essendo $ct'/2 = L'$ (si ricordi che per l'osservatore in K' l'asta è ferma), si ottiene infine

$$L = L' \sqrt{1 - w^2/c^2} \quad \Longrightarrow \quad L = L' \cdot \gamma \quad (65)$$

vale a dire l'espressione della contrazione delle lunghezze (cfr. la (55)), come volevasi dimostrare.

Dopo aver chiarito che, una volta assunto il principio di costanza della velocità della luce, la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi sono conseguenze dirette e inevitabili per quanto *indigeste* al senso comune, viene naturale chiedersi da dove abbia origine questa avversione della mente umana nei confronti di tali concetti. La risposta è contenuta nelle trasformazioni di Lorentz, come anche nella spiegazione della relatività della simultaneità: lo spazio e il tempo sono in realtà grandezze inscindibilmente mescolate e perciò non è lecito considerarle separatamente, come facciamo invece quando parliamo di durata di un fenomeno o lunghezza di un oggetto. È il nostro modo di percepire sensorialmente la realtà a indurci in errore. E rendendocene conto non proveremmo più imbarazzo nei confronti del relativismo filosofico a cui ci sentiamo condotti, perché in realtà **la teoria della relatività non nega né l'esistenza di grandezze assolute, né il fatto che le leggi della natura possano assumere la stessa forma a prescindere dal riferimento di osservazione.** Per darne una prova ripartiamo dai risultati appena trovati: consideriamo due eventi A e B , e siano ΔL e Δt gli intervalli spaziali e temporali che li separano rispetto al riferimento K e $\Delta L'$ e $\Delta t'$ gli intervalli che li separano rispetto a K' . Dalla 1^a e 4^a trasformazione di Lorentz, sappiamo che

$$\begin{aligned} \Delta L' &= x'_B - x'_A = \frac{\Delta L - w\Delta t}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \\ \Delta t' &= t'_B - t'_A = \frac{\Delta t - \frac{w}{c^2} \Delta L}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \end{aligned} \quad (66)$$

Elevandole al quadrato otteniamo

$$\begin{aligned} (\Delta L')^2 &= \frac{(\Delta L)^2 - 2w\Delta L\Delta t + w^2(\Delta t)^2}{1 - w^2/c^2} \\ (\Delta t')^2 &= \frac{(\Delta t)^2 - 2\frac{w}{c^2}\Delta L\Delta t + \frac{w^2}{c^4}(\Delta L)^2}{1 - w^2/c^2} \end{aligned} \quad (67)$$

Moltiplicando entrambi i membri della (67_b) per c^2 e sottraendo il risultato, membro a membro,

dalla (67_a), si ottiene

$$\begin{aligned}
 (\Delta L')^2 - c^2 (\Delta t')^2 &= \frac{\left[(\Delta L)^2 - 2w\Delta L\Delta t + w^2(\Delta t)^2 - c^2 (\Delta t)^2 + 2w\Delta L\Delta t - w^2(\Delta L)^2 \right]}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \quad (68) \\
 &= \frac{(\Delta L)^2 \cdot \left[1 - \frac{w^2}{c^2} \right] - c^2 (\Delta t)^2 \cdot \left[1 - \frac{w^2}{c^2} \right]}{1 - \frac{w^2}{c^2}} = (\Delta L)^2 - c^2 (\Delta t)^2
 \end{aligned}$$

Questo significa che, anche se gli intervalli spaziali o temporali che separano due eventi dipendono dal sistema di riferimento dal quale essi sono osservati, esiste però una combinazione dei loro quadrati che è *invariante*, ossia assume lo stesso valore in qualunque riferimento inerziale. Questa combinazione (o più precisamente la sua radice quadrata) prende il posto, nella teoria della relatività, degli abituali concetti di durata e distanza/lunghezza. Perciò, se riusciamo a pensare in termini spazio-temporali, e non solo spaziali o solo temporali separatamente, la teoria ci fornisce un concetto, uno strumento, in sostituzione di quelli classici di *distanza/lunghezza* e *durata*, che hanno perso di valore in senso assoluto.

2.5 Dinamica relativistica

2.5.1 Massa e quantità di moto

Ricordiamo che nella meccanica newtoniana associamo ad ogni corpo un numero che misura una proprietà particolare del corpo stesso chiamata massa: essa è considerata invariabile, indipendente dalla posizione e dalla velocità del corpo. La seconda legge della dinamica ci dice poi che la variazione nel tempo della quantità di moto di un corpo è proporzionale alla forza applicata su di esso. La quantità di moto di un corpo risulta essere il prodotto della sua massa per la velocità. Di grande importanza in meccanica è il cosiddetto principio di conservazione della quantità di moto: per un sistema di corpi su cui non agisce alcuna forza esterna, esso stabilisce che la quantità di moto totale si conserva. La quantità di moto può variare continuamente per un singolo corpo del sistema, ma nel complesso il valore totale non cambierà.

Richiamiamo innanzitutto il principio di conservazione della quantità di moto attraverso un esempio molto semplice che potrà tornare utile più avanti. Possiamo paragonare la quantità di moto ad un patrimonio economico che può essere investito o speso. Supponiamo che un determinato gruppo di individui posseda questo patrimonio e che non possano avvenire scambi economici con nessun'altra persona al di fuori di questo gruppo: gli scambi avvengono esclusivamente fra i membri del gruppo. Si può facilmente intuire che per quanto si possa scambiare denaro, per quanto qualcuno possa diventare molto ricco e qualcuno rimanere senza alcuna parte di patrimonio, il valore del capitale totale iniziale non sarà cambiato, nessuno dei membri del gruppo inoltre può possedere più del patrimonio iniziale. Un osservatore che guardi questa società dall'esterno può usare un sistema diverso di valutazione del denaro rispetto a quello usato dai membri stessi, il valore del patrimonio sarà diverso, ma esso rimarrà comunque costante nel tempo. Possiamo dire che nell'esempio utilizzato vi è la conservazione di due quantità: il patrimonio e il numero dei membri del gruppo. Allo stesso modo in un sistema di corpi considereremo la conservazione della massa e la conservazione della quantità di moto. La valutazione di queste due grandezze può variare da un osservatore all'altro, ma qualunque forza interna agisca nel sistema, affermiamo che il valore della massa e della quantità di moto totale non varierà.

Supponiamo di avere due corpi A, B , rispettivamente di massa m_1 e m_2 con velocità v_1, v_2 nella direzione AB , solidali con un sistema K . Consideriamo un sistema K' che vede il sistema K muoversi con velocità w . Secondo il sistema K i due principi di conservazione dicono che la massa totale del sistema è $m_1 + m_2 = \mathcal{C}$ e la quantità di moto totale è $m_1 v_1 + m_2 v_2 = \mathcal{D}$ (dove \mathcal{C}, \mathcal{D} sono due costanti definite che rappresentano il valore calcolato da K della massa e della quantità di moto totali

in assenza di forze esterne). Accettando i principi della meccanica classica K' direbbe che la massa totale è ancora $m_1 + m_2 = \mathcal{C}$ mentre la quantità di moto totale risulta

$$m_1(w + v_1) + m_2(w + v_2) = w(m_1 + m_2) + m_1v_1 + m_2v_2 = w\mathcal{C} + \mathcal{D}.$$

K' non trova la stessa costante calcolata da K , ma è certamente d'accordo sulla conservazione della quantità di moto totale (ricordiamoci l'analogia con il capitale finanziario). K' però ha studiato i principi di Einstein e rivedendo i suoi calcoli si accorge che qualcosa non torna. Applicando infatti la legge di composizione relativistica delle velocità ottiene per la quantità di moto totale la seguente espressione

$$\frac{m_1(w + v_1)}{1 + \frac{wv_1}{c^2}} + \frac{m_2(w + v_2)}{1 + \frac{wv_2}{c^2}} = w \left(\frac{m_1}{1 + \frac{wv_1}{c^2}} + \frac{m_2}{1 + \frac{wv_2}{c^2}} \right) + \left(\frac{m_1v_1}{1 + \frac{wv_1}{c^2}} + \frac{m_2v_2}{1 + \frac{wv_2}{c^2}} \right)$$

Le condizioni $m_1 + m_2 = \mathcal{C}$ e $m_1v_1 + m_2v_2 = \mathcal{D}$ non bastano a far rimanere costante l'espressione trovata da K' e risulta impossibile esprimere quest'ultima in termini di $w, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Quindi il fatto che per un determinato osservatore la massa e la quantità di moto totali di un sistema restino costanti non è sufficiente a far sì che un altro osservatore sia d'accordo con questa conclusione. Sembra quindi di essere arrivati al punto di dover abbandonare un così importante principio come quello della conservazione della quantità di moto. Einstein elimina totalmente questa possibilità introducendo un nuovo concetto di massa. Secondo Einstein non è vero che la massa di un corpo sia indipendente dalla sua velocità: egli infatti affermò che se in un sistema K un corpo, che in quiete rispetto ad esso ha una massa m_0 , si muove di velocità v allora la sua massa (misurata sempre da K) avrà il seguente valore

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (69)$$

dove al termine m_0 viene dato il nome di massa a riposo. La velocità v al denominatore è la velocità che il corpo ha in un determinato sistema di riferimento, da non confondere con la velocità che noi abbiamo chiamato w , velocità di un particolare sistema inerziale rispetto ad un altro.

Questa ipotesi fu già formulata in altri termini da Thomson che, studiando il moto degli elettroni a grandi velocità, aveva verificato un aumento della massa degli elettroni stessi. Su questa definizione torneremo più avanti, ora verifichiamo che essa ci permette di mantenere il principio di conservazione della quantità di moto.

Alla luce di questa definizione di massa la quantità di moto risulta

$$p = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (70)$$

Per l'osservatore K ora la massa totale vale (m_1 e m_2 sono le rispettive masse a riposo dei corpi A e B)

$$\frac{m_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \mathcal{F}$$

la quantità di moto invece varrà

$$\frac{m_1v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{m_2v_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \mathcal{G}$$

Qualunque cosa accada nel sistema (senza alcuna forza esterna) K troverà sempre i valori \mathcal{F} e \mathcal{G} per le due grandezze.

Per quanto riguarda K' le velocità dei due corpi saranno

$$v'_1 = \frac{w + v_1}{1 + \frac{wv_1}{c^2}}, \quad v'_2 = \frac{w + v_2}{1 + \frac{wv_2}{c^2}}$$

Per poter svolgere con più facilità i calcoli algebrici è opportuno assumere la seguente notazione. Poniamo

$$\beta = \frac{w}{c} \quad \beta_1 = \frac{v_1}{c} \quad \beta_2 = \frac{v_2}{c}$$

Le espressioni delle velocità nel sistema K' diventano quindi

$$v'_1 = \frac{c(\beta + \beta_1)}{1 + \beta\beta_1} \quad v'_2 = \frac{c(\beta + \beta_2)}{1 + \beta\beta_2}.$$

La massa del primo corpo risulta quindi

$$\frac{m_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta + \beta_1}{1 + \beta\beta_1}\right)^2}}.$$

Il termine sotto radice al denominatore, omettendo alcuni passaggi, diventa

$$1 - \left(\frac{\beta + \beta_1}{1 + \beta\beta_1}\right)^2 = \frac{(1 + \beta\beta_1)^2 - (\beta + \beta_1)^2}{(1 + \beta\beta_1)^2} = \dots = \frac{(1 - \beta^2)(1 - \beta_1^2)}{(1 + \beta\beta_1)^2}$$

Per la massa del primo corpo si ottiene

$$\frac{m_1(1 + \beta\beta_1)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_1^2)}}.$$

La massa totale invece:

$$\begin{aligned} \frac{m_1(1 + \beta\beta_1)}{\sqrt{(1 - \beta^2)}\sqrt{(1 - \beta_1^2)}} + \frac{m_2(1 + \beta\beta_2)}{\sqrt{(1 - \beta^2)}\sqrt{(1 - \beta_2^2)}} &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \left[\frac{m_1 + m_1\beta\beta_1}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)}} + \frac{m_2 + m_2\beta\beta_2}{\sqrt{(1 - \beta_2^2)}} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \left[\frac{m_1}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)}} + \frac{m_2}{\sqrt{(1 - \beta_2^2)}} + \beta \left(\frac{m_1\beta_1}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)}} + \frac{m_2\beta_2}{\sqrt{(1 - \beta_2^2)}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} [\mathcal{F} + \beta\mathcal{G}] \end{aligned}$$

perciò, sebbene K' assegni alla massa totale un valore diverso da quello dato da K , finché per K la massa e la quantità di moto totali restano costanti, anche per K' la massa totale rimarrà invariata.

Per K' inoltre la quantità di moto del primo corpo sarà

$$\frac{m_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta + \beta_1}{1 + \beta\beta_1}\right)^2}} \frac{c(\beta + \beta_1)}{1 + \beta\beta_1}$$

E, servendoci dei risultati ottenuti, vediamo che ciò equivale a

$$\frac{m_1(1 + \beta\beta_1)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_1^2)}} \frac{c(\beta + \beta_1)}{1 + \beta\beta_1} = \frac{m_1 c(\beta + \beta_1)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_1^2)}}.$$

La quantità di moto totale di conseguenza sarà

$$\begin{aligned} & \frac{m_1 c(\beta + \beta_1)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_1^2)}} + \frac{m_2 c(\beta + \beta_2)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_2^2)}} = \dots = \\ & = \frac{c}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \left[\beta \left(\frac{m_1}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)}} + \frac{m_2}{\sqrt{(1 - \beta_2^2)}} \right) + \left(\frac{m_1 \beta_1}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)}} + \frac{m_2 \beta_2}{\sqrt{(1 - \beta_2^2)}} \right) \right] = \frac{c}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} [\beta \mathcal{F} + \mathcal{G}] \end{aligned}$$

Anche in questo caso sebbene K' assegni alla quantità di moto totale un valore diverso da quello dato da K , finchè per K la massa e la quantità di moto rimangono costanti, anche per K' la quantità di moto totale rimarrà costante!

Si vede quindi che se accettiamo la definizione einsteiniana della massa, rimangono validi sia il principio di conservazione della massa che quello di conservazione della quantità di moto. Questo risultato, ottenuto in particolari condizioni, è comunque valido in generale per moti con velocità in direzione qualsiasi.

La definizione (69) è un altro rivoluzionario risultato della teoria della relatività di Einstein e scardina completamente la definizione newtoniana di massa vista come “*quantitas materiae*” (quantità di materia). Il fatto che la nuova definizione di massa fosse stata introdotta da Einstein in un caso molto particolare, ossia per una particella carica soggetta a forze elettromagnetiche, indusse inizialmente gli studiosi a ritenere che si potesse salvare il concetto newtoniano di massa attribuendo a qualche effetto elettromagnetico sconosciuto lo scostamento della particella carica della traiettoria prevista dalla fisica classica. In seguito, con la nascita della fisica nucleare, che studia anche particelle in moto con velocità paragonabile a quelle della luce, la definizione einsteiniana di massa venne assunta come definizione generale di massa al posto di quella newtoniana. Di questa formula infatti si sono avute innumerevoli conferme sperimentali, con la costruzione di acceleratori di particelle sempre più potenti come al *CERN* di Ginevra.

Da questa definizione segue che qualunque particella dotata di massa a riposo non nulla non potrà mai raggiungere la velocità della luce. Se calcoliamo il limite della (69) per v tendente a c si ha

$$\lim_{v \rightarrow c} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \infty$$

A causa del progressivo aumento della massa, una particella che raggiunge velocità sempre più prossime a quella della luce, è sottoposta ad una accelerazione sempre più piccola, a parità di forza. Anche questa definizione è, nel limite classico di $v \rightarrow 0$, coerente con la definizione classica di massa: $m(v = 0) = m_0$.

2.5.2 Energia cinetica relativistica – Equivalenza massa-energia

La definizione relativistica della massa può sembrare un semplice espediente per continuare a scrivere nella forma consueta la legge fondamentale della dinamica senza dover rinunciare al principio di relatività. In realtà la (69) possiede un significato fisico profondo, che è forse il risultato più importante di tutta la relatività: l'inerzia di un corpo dipende dal contenuto energetico del corpo stesso. Questa legge fondamentale, espressa in forma di semplice ipotesi da Einstein in un'altra memoria pubblicata nello stesso anno 1905, è stata successivamente confermata negli studi sperimentali sugli urti fra particelle elementari.

In base alla definizione (69) abbiamo visto che se un corpo è in quiete rispetto ad un osservatore K , ha massa m_0 , quando esso si muove la sua massa aumenta di una quantità

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \quad (71)$$

Questo fatto, è del tutto estraneo alle previsioni della fisica prerelativistica in base alla quale, se un corpo in quiete ha massa m_0 , quando viene posto in movimento con velocità v esso non aumenta la sua massa ma viene a trovarsi dotato di energia cinetica pari a $1/2 m_0 v^2$. In ambito relativistico la situazione va invece vista in tutt'altro modo. Si riscriva la (71) in modo che i due termini di destra possiedano un denominatore comune:

$$\Delta m = \frac{m_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

moltiplicando ora numeratore e denominatore per il termine $1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ si ottiene:

$$\Delta m = \frac{m_0 \left[1 - \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 \right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)} = \frac{m_0 \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Nel caso in cui v sia molto piccola rispetto a c , il rapporto v^2/c^2 è senz'altro trascurabile rispetto a 1, quindi la formula precedente diviene:

$$\Delta m \simeq \frac{m_0 \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2}$$

dunque l'incremento di massa risulta uguale, in prima approssimazione al rapporto fra l'energia cinetica del corpo e il quadrato della velocità della luce. Riscrivendo la formula di partenza

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2}$$

ovvero, moltiplicando per c^2 e riordinando:

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2.$$

Nell'ultimo termine a destra dell'uguale si riconosce l'espressione classica dell'energia cinetica. Questo fatto, portando a sinistra il termine m_0c^2 , ci suggerisce di assumere che l'espressione

$$K = (m - m_0)c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (72)$$

rappresenti l'energia cinetica relativistica. Dalla (72) si ricava anche

$$m = m_0 + \frac{K}{c^2}$$

che mostra come la massa di un corpo in moto è pari alla somma della sua massa a riposo e della massa della sua energia cinetica relativistica. Poiché inoltre l'energia cinetica può sempre trasformarsi in altre forme di energia, appare del tutto naturale generalizzare il risultato ottenuto, affermando che ad una quantità di energia E è associabile una massa data da

$$m = \frac{E}{c^2}. \quad (73)$$

Perciò, quando forniamo una quantità di energia E ad un corpo, la sua massa aumenta della quantità E/c^2 e, viceversa, quando un corpo cede energia, la sua massa diminuisce della stessa quantità. La relazione precedente può essere scritta nella più nota forma

$$E = mc^2. \quad (74)$$

In particolare un corpo in quiete di massa a riposo m_0 possiede un contenuto di energia E_0 , detta *energia a riposo*, pari a m_0c^2 . Questa relazione è nota come *equazione di Einstein* e mostra che massa ed energia sono due aspetti di un unico ente fisico. Essa rappresenta una grande unificazione della realtà fisica in quanto *la materia*, nel suo significato più generale (comprendendo anche la luce e le altre forme di energia pura, secondo il linguaggio della fisica classica), *si manifesta in due aspetti fondamentali*: l'**inerzia**, misurata dalla *massa*, e la **capacità di compiere lavoro**, misurata dall'*energia*, strettamente legate l'una all'altra. In questo modo l'energia cessa di essere un attributo della materia e diventa una realtà fisica autonoma. Alle due leggi classiche della conservazione della massa e dell'energia si sostituisce dunque un'unica legge di *conservazione della massa-energia*. Per verificarne esattamente la conservazione il sistema deve essere isolato non soltanto rispetto a scambi di materia, ma anche rispetto a scambi di energia.

Riscriviamo la (74) nella seguente forma

$$E = mc^2 = m_0c^2 + K$$

Essa ci dice dunque che l'energia totale associata ad un corpo non è data solo dalla sua energia cinetica K , ma include anche una certa quantità di energia associata alla sua massa a riposo m_0 . Sarà dunque possibile rilasciare una certa quantità di questa frazione di energia, trasformandola in una forma più accessibile? La risposta a questa domanda è affermativa e innumerevoli sono le applicazioni pratiche seguite a questa scoperta, cercheremo di dare alcuni esempi di utilizzo di questa forma di energia nel prossimo paragrafo.

Esercizio 3 (da proporre per casa) Dimostrare che fra la quantità di moto p e l'energia E di una particella di massa a riposo m_0 sussiste la relazione

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2. \quad (75)$$

SOLUZIONE – Dalle relazioni

$$E = mc^2 \qquad p = mv \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

si ricava

$$E^2 = m^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^6}{c^2 - v^2}$$

$$p^2 = m^2 v^2 = \frac{m_0^2 v^2 c^2}{c^2 - v^2}$$

da cui ricaviamo l'espressione cercata

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^6 - m_0^2 v^2 c^4}{c^2 - v^2} = \frac{(c^2 - v^2) (m_0^2 c^4)}{c^2 - v^2} = m_0^2 c^4. \quad (76)$$

Questa espressione mostra l'esistenza di un nuovo invariante relativistico (oltre a quello che coinvolge le grandezze spazio e tempo): il valore del primo membro dell'espressione (76) non dipende dal particolare sistema di riferimento nel quale queste tre grandezze vengono valutate. Il termine a sinistra infatti è invariante perché prodotto di quantità invarianti, la velocità della luce c e la massa a riposo m_0 (che, se misurata in uno stato di quiete, non può mutare valore a seconda dell'osservatore che esegue la misura). Dunque la differenza del quadrato dell'energia e del prodotto pc è un invariante (detto anche *invariante energia-quantità di moto*).

2.5.3 Applicazioni

Al tempo della formulazione della teoria nessuno poteva immaginare le importantissime conseguenze e le innumerevoli applicazioni dell'equazione di Einstein: cercheremo ora di dare un breve cenno ad alcune di queste conseguenze.

Iniziamo con un esempio banale che ci può far capire quanto sia importante per l'economia mondiale, la ricerca e la tecnologia la possibilità di sfruttare l'energia a riposo di un corpo di massa m_0 . Prendiamo una mela di massa a riposo di 0,12 kg e calcoliamone l'energia a riposo E_0 :

$$E_0 = m_0 c^2 = 0,12 \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 1,1 \cdot 10^{16} \text{ J}.$$

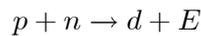
Se confrontiamo questa energia con l'energia consumata in media in un anno negli Stati Uniti, che equivale a circa 10^{20} J, possiamo intuire quanto grande sia la quantità di energia che potremmo sfruttare se fossimo in grado di trasformare interamente l'energia a riposo di un dato corpo in una forma di energia utilizzabile. L'esempio riportato è ovviamente estremo, ad oggi siamo in grado infatti di utilizzare solo una piccola frazione di questa energia: questo avviene ad esempio nelle reazioni nucleari come la fissione. Prima di considerare le reazioni nucleari però occupiamoci delle reazioni chimiche che coinvolgono gli atomi e le molecole.

Consideriamo, ad esempio la reazione che porta alla formazione dell'anidride carbonica. Se prendiamo 12 g di carbonio che reagiscono con 32 g di ossigeno, otterremo circa 44 g di anidride carbonica.

L'energia cinetica delle molecole di anidride carbonica in rapido movimento dopo la reazione si manifesta sotto forma di calore, pari a circa $3,9 \cdot 10^5$ J. Essendo l'energia cinetica delle molecole di ossigeno trascurabile rispetto a quella dell'anidride carbonica, possiamo interpretare questa energia come dovuta interamente alla conversione di una parte della massa iniziale, per cui si ha

$$m = E/c^2 \simeq (3,9 \cdot 10^5 / 9 \cdot 10^{16}) \text{ kg} = 4,3 \cdot 10^{-9} \text{ g}.$$

Questa variazione di massa è certamente troppo piccola per poter essere rilevata dalle tecnologie chimiche a disposizione: la percentuale di massa convertita infatti è circa una parte su 10 miliardi ($4,3 \cdot 10^{-9} \text{ g} / 44 \text{ g} \simeq 10^{-10}$), mentre gli strumenti riescono ad ottenere al massimo un precisione di una parte su 10 milioni (10^{-7}). La situazione è ben diversa nel caso delle reazioni nucleari: siamo infatti in grado di valutare con elevata precisione le masse nucleari e quindi ricavare dalle differenze di massa prima e dopo la reazione la quantità di energia convertita. Un semplice esempio di reazione nucleare è fornito dalla formazione di uno degli isotopi dell'idrogeno, il deuterio, il cui nucleo è formato da un protone ed un neutrone. La somma della massa del protone e del neutrone è maggiore della massa del nucleo del deuterio, ciò significa che nel processo di formazione del deuterio (processo di *fusione*) parte della massa dei due reagenti si converte in energia cinetica. Indicando con p il protone, n il neutrone e con d il nucleo di deuterio si ha



La massa del protone $m_p = 1,6724 \cdot 10^{-24}$ g, mentre la massa del neutrone è $m_n = 1,6747 \cdot 10^{-24}$ g, la loro somma risulta $m_p + m_n = 3,3471 \cdot 10^{-24}$ g. La massa del nucleo di deuterio risulta invece $m_d = 3,3433 \cdot 10^{-24}$ g. La differenza di massa risulta quindi di $3,8 \cdot 10^{-27}$ kg che dà un'energia $E = mc^2 \simeq 1,18 \cdot 10^{-18}$ J. Risultato confermato dall'esperienza.

Simili reazioni nucleari di fusione (la fusione dell'idrogeno per formare elio ad esempio ed altre) avvengono all'interno del sole e delle altre stelle e l'enorme quantità di energia emessa garantisce l'esistenza della vita sul nostro pianeta! Altri tipi di reazioni nucleari sfruttano la conversione di una parte di massa in energia: il processo di fissione dell'uranio ne è un esempio. La fissione dell'uranio fu scoperta nel 1938 da Hahn e la reazione converte circa lo 0,1% della massa a riposo iniziale del nucleo di uranio in energia cinetica. Il processo di fissione (che può avvenire non solo per l'uranio, ma anche per molti altri nuclei pesanti) consiste nello spezzarsi del nucleo originale in due o più frammenti: se sommiamo le masse dei frammenti formati si ottiene una massa inferiore rispetto alla massa del nucleo originale, una parte di massa infatti si converte in energia cinetica. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza di questo effetto, basta paragonare l'energia generata dalla fissione dell'uranio con quella che si ottiene dalla combustione del carbone: la fissione di un grammo di ^{235}U (un isotopo dell'uranio molto fissile, ovvero in grado di frammentarsi più facilmente di altri nuclei) genera la stessa quantità di energia generata dalla combustione di 20 tonnellate di carbone! L'energia della fissione nucleare è sfruttata ad esempio nelle centrali nucleari per produrre energia elettrica.

L'energia della fissione e della fusione sono quindi di grande importanza per la nostra stessa esistenza. Purtroppo nel corso della storia questa energia è stata sfruttata anche per altri scopi: le bombe che distrussero Hiroshima e Nagasaki erano basate infatti sul processo di fissione dell'uranio, mentre le famose bombe H o termonucleari (utilizzate solo in test nucleari) sfruttano il processo di fusione dell'idrogeno.

2.6 Complementi

2.6.1 Evoluzione storica dell'idea di "etere"

Nel corso del XIX secolo molte furono le scoperte scientifiche che permisero grandi progressi nella scienza ed entusiasmarono i ricercatori; tante furono anche le teorie e le ipotesi poi rivelatesi false e prive di significato: una di queste fu certamente l'ipotesi dell'esistenza dell'etere, inteso come mezzo di propagazione dei fenomeni luminosi prima, più in generale poi, di quelli elettromagnetici. Cercheremo di ripercorrere in breve la storia della teoria dell'etere che vide molti importanti scienziati dell'Ottocento formulare le più svariate ipotesi e teorie.

La scoperta che alcuni eventi fisici si propagassero attraverso lo spazio astronomico suggerì l'ipotesi che lo spazio non fosse vuoto, ma riempito di una sostanza estremamente fine e senza peso: l'*etere*, mezzo capace di propagare tali fenomeni. I primi impulsi a questa ipotesi vennero dagli studi ottici della prima metà dell'Ottocento, in particolare dopo che numerosi esperimenti mostrarono la proprietà delle onde luminose di essere trasversali. Fresnel arrivò ad ipotizzare lo sviluppo di una futura teoria dinamica della luce che, conformemente ai metodi della meccanica, permettesse di dedurre le caratteristiche dei fenomeni ottici dalle proprietà dell'etere e dalle forze in esso agenti.

L'etere doveva essere necessariamente un solido dotato di proprietà elastiche, poichè solo in una simile sostanza possono generarsi onde meccaniche trasversali. Fresnel studiò le leggi della propagazione luminosa nei cristalli da un punto di vista empirico, interpretandole a partire dalla nozione di trasversalità delle onde. I risultati di Fresnel sembrarono confermare l'analogia fra le onde luminose e quelle elastiche e ciò diede un grande impulso alle ricerche sulla teoria dell'elasticità. Si pervenne così ad una teoria elastica della luce, consistente nel trattare l'etere come un solido elastico. Quali proprietà si devono assegnare a questo etere elastico? In primo luogo, a causa del grandissimo valore della velocità di propagazione c , è necessario supporre che la rigidità elastica sia molto elevata e che la densità sia molto piccola, per permettere il movimento dei corpi. Inoltre, poichè la luce non si propaga con la stessa velocità in tutte le sostanze, dobbiamo ritenere che l'etere si condensi in modo diverso all'interno dei corpi o che possa variare la sua elasticità all'interno di essi. Trattandosi di un problema non ben definito e di difficile verifica, diverse furono le teorie formulate sulla natura dell'etere elastico (da Navier a Cauchy, a Poisson ed altri).

Una prima obiezione all'ipotesi dell'etere elastico nasce dalla necessità di ammettere che la sua rigidità sia sufficientemente elevata da spiegare l'altissima velocità delle onde: tale sostanza offrirebbe necessariamente una notevole resistenza al moto dei corpi celesti, in modo particolare dei pianeti, mentre le misure astronomiche non hanno mai misurato alcuna deviazione dalle leggi di Newton che ne giustificasse l'esistenza. Stokes (1845) tentò di superare questa obiezione facendo osservare che il concetto di solidità di un corpo ha in sè qualcosa di relativo: se noi colpiamo con un martello un pezzo di resina, questo si spacca in modo netto; ma se poniamo su di esso una certa massa, essa affonda in modo graduale, anche se in modo molto lento, nel corpo, che si comporta così come un liquido viscoso. D'altra parte le forze che intervengono nella propagazione delle onde luminose, variano in tempi estremamente brevi rispetto alle variazioni relativamente lente che si verificano nel moto dei pianeti; il rapporto fra le variazioni di questi due tipi di forze è molto più elevato di quello che si ha fra la forza impulsiva dovuta al colpo di martello e la forza dovuta al peso. Se ne conclude quindi che l'etere può comportarsi come un solido elastico nei confronti della luce, e non opporre alcuna resistenza al moto dei pianeti. Se riuscissimo però ad accettare l'idea che lo spazio astronomico è totalmente riempito da una specie di resina, le difficoltà più serie sorgono proprio quando si cerchi di spiegare con questa ipotesi la propagazione della luce. Dobbiamo infatti tener presente innanzitutto che nei solidi, contemporaneamente a un'onda longitudinale si propagano sempre due onde trasversali. Un ulteriore problema da affrontare fu quello della posizione e dello stato di moto dei corpi che emettono, ricevono o trasmettono luce. Lo spazio che in meccanica è, in assenza di corpi materiali, considerato vuoto, in ottica è completamente occupato dall'etere, cioè da una specie di materia dotata di massa, densità ed elasticità. A questo universo riempito d'etere, possiamo quindi applicare la teoria newtoniana dello spazio-tempo; esso non è formato da masse isolate separate da spazi vuoti, ma consiste di una

distribuzione continua nel cui interno galleggiano le masse dei corpi. L'etere e la materia interagiscono mediante forze di tipo meccanico e si muovono secondo le leggi di Newton. Sotto l'aspetto logico è quindi lecito studiare i fenomeni ottici da un punto di vista newtoniano; resta da vedere se ciò è confermato dall'esperienza. Tuttavia, non è possibile realizzare degli esperimenti che rispondano in modo soddisfacente a questo problema, poichè nulla si sa dello stato di moto dell'etere all'esterno e all'interno della materia. Occorre porre dunque il problema in questi termini: si è in grado di fare delle ipotesi sulle azioni reciproche fra etere e materia, che diano una corretta interpretazione di tutti i fenomeni ottici? Secondo il principio di relatività della meccanica classica, lo spazio assoluto esiste solo in un senso molto ristretto, in quanto tutti i sistemi inerziali in moto rettilineo uniforme rispetto a un altro sistema possono essere considerati fermi nello spazio; si può allora immediatamente fare l'ipotesi che l'*etere astronomico*, molto distante dai corpi materiali, è, in ogni sistema inerziale, in uno stato di quiete. Se così non fosse, alcune parti dell'etere sarebbero accelerate, e dovremmo pensare all'esistenza di forze centrifughe tali da produrre variazioni di densità ed elasticità; dalle osservazioni sulla luce proveniente dalle stelle non si ha però alcuna indicazione in questo senso. Questa ipotesi soddisfa da un punto di vista formale il principio di relatività classica. Se l'etere è annoverato fra i corpi materiali, i moti di traslazione dei corpi rispetto all'etere sono dei moti relativi, esattamente come nel caso di due corpi in moto fra loro; non è possibile quindi riconoscere un moto di traslazione dell'etere e di tutta la materia con esperienze di tipo meccanico o ottico. Ma in un universo costituito solo da corpi materiali, non includendo l'etere, non è necessario che valga il principio di relatività: una qualunque traslazione di tutta la materia a cui l'etere non partecipi (cioè un moto relativo rispetto ad esso), può essere osservata mediante un esperimento di ottica. In questo senso l'etere individuerrebbe un sistema di riferimento assolutamente a riposo (una ipotesi che entusiasma particolarmente gli scienziati: essi avrebbero così potuto stabilire una velocità assoluta!). Il problema principale è dunque quello di stabilire se i fenomeni ottici dipendono esclusivamente dai moti relativi dei corpi, oppure se è possibile riconoscere uno stato di moto rispetto all'etere.

Si realizzarono allora una serie di esperimenti finalizzati a rivelare il moto della Terra o del sistema solare rispetto all'etere (esperimenti condotti sulla Terra o basati su osservazioni astronomiche come per le eclissi dei satelliti di Giove): nessuno di essi riuscì a stabilire, almeno con la precisione consentita dagli strumenti del tempo, la presenza del cosiddetto "vento d'etere". Per cercare di spiegare gli esperimenti, Stokes elaborò la teoria del "trascinamento", affermando che l'etere partecipa totalmente al moto all'interno della materia: egli pensava che la Terra trascinasse con sé l'etere in essa contenuto, e che questo moto dell'etere decrescesse gradualmente verso le regioni estreme dell'universo, fino a raggiungere uno stato di quiete. È chiaro quindi che secondo questa ipotesi i fenomeni ottici debbano manifestarsi sulla Terra come se questa fosse a riposo rispetto all'etere. Questa ipotesi però non teneva conto del fatto che neanche gli esperimenti eseguiti con la luce proveniente dalle stelle, che non avrebbe dovuto risentire del trascinamento, non rilevavano alcun moto relativo rispetto all'etere. Fresnel elaborò così la teoria di un trascinamento solo parziale dell'etere ed ottenne una formula in grado di spiegare i risultati di quasi tutti gli esperimenti fino ad allora condotti (secondo questa teoria il trascinamento dell'etere, avviene in maniera diversa da sostanza a sostanza a seconda del suo indice di rifrazione). A questa teoria, comunque si posero varie obiezioni: una di queste è che i raggi di luce di diversa frequenza hanno indici di rifrazione differenti, quindi il coefficiente di trascinamento dovrebbe avere un valore diverso per ognuna delle frequenze della luce!

Un ulteriore impulso alla teoria dell'etere venne con l'avvento della teoria elettromagnetica di Maxwell e con la scoperta che le onde luminose non sono nient'altro che onde elettromagnetiche. Da allora in poi si ritenne che esistesse un solo tipo di etere attraverso il quale dovevano propagarsi tutti i fenomeni elettrici, magnetici e ottici. Nacquero così svariate nuove ipotesi per spiegare il comportamento dell'etere alla luce delle nuove scoperte teoriche e dei nuovi esperimenti. Hertz riprese l'idea di un trascinamento completo applicandolo alle equazioni di Maxwell, ben sapendo comunque che tale modo di procedere doveva mantenere un carattere provvisorio, poichè anche nello studio dei fenomeni ottici si sarebbero incontrate le stesse difficoltà della teoria di Stokes. La teoria dell'elettrone che Lorentz propose nel 1892 rappresentò il culmine e l'ultimo stadio della fisica dell'etere materiale.

Egli enunciò una tesi estremamente radicale, mai prima asserita con altrettanta chiarezza: l'etere è a riposo nello spazio assoluto. In linea di principio ciò significa far coincidere l'etere con lo spazio assoluto. Lo spazio assoluto non è il vuoto, ma un ente dotato di proprietà ben definite, il cui stato è descritto mediante due grandezze misurabili: il campo elettrico \mathbf{E} e il campo magnetico \mathbf{H} . Questa ipotesi rappresentò un ulteriore passo avanti rispetto alla teoria di Fresnel, in cui l'etere dello spazio astronomico era a riposo in un appropriato sistema inerziale, mentre l'etere interno ai corpi materiali era parzialmente trascinato da essi. Lorentz rinunciò all'idea di un trascinamento parziale e arrivò praticamente allo stesso risultato. La teoria di Lorentz era infatti in grado di spiegare tutti gli esperimenti condotti, trovando le risposte anche alle più forti obiezioni poste alla teoria di Fresnel.

La base dell'intera teoria, però, si era già incrinata qualche anno prima della sua pubblicazione, mentre la sua costruzione continuava a svilupparsi, con gli esperimenti di Michelson e Morley (1881): essi furono in grado di negare il moto relativo della Terra rispetto all'etere con una precisione mai ottenuta prima in nessuna altro esperimento. La conclusione che Michelson e Morley trassero dal loro esperimento fu che l'etere doveva essere completamente trascinato dal moto della Terra, in accordo con Stokes ed Hertz; tale conclusione però era contraddetta dai numerosi fatti sperimentali che provavano invece l'esistenza di un trascinamento solo parziale. La teoria di Lorentz era quindi in una situazione di grande difficoltà (c'è da osservare il fatto che malgrado queste contraddizioni, la teoria si sviluppò e resistette a lungo, a prova della sua intrinseca solidità dovuta a una descrizione coerente e completa della realtà fisica, ma anche a prova della irrinunciabile convinzione della comunità scientifica dell'esistenza dell'etere). Essa infine riuscì a superare in una certa misura anche questa difficoltà, grazie ad una ipotesi di Fitzgerald (1892) in seguito ripresa da Lorentz stesso. Per spiegare i risultati dell'esperimento si avanzò l'ipotesi che ogni corpo in moto con velocità v rispetto all'etere si contrae lungo la direzione del moto secondo il fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Questa contrazione inoltre non può essere misurata sulla Terra, poichè ogni strumento subirebbe la stessa contrazione: solo un osservatore a riposo nell'etere esterno alla Terra potrebbe misurarla! L'aspetto più notevole di questa ipotesi, e in un certo senso il meno comprensibile, consiste nell'interpretare la contrazione non come il risultato di un certo tipo di forza, ma soltanto come una conseguenza accidentale del moto. Questa obiezione tuttavia non impedì a Lorentz di inserire tale ipotesi nella sua teoria, specie nel momento in cui nuovi esperimenti confermavano i risultati di Michelson e Morley. Successivamente Lorentz cercò di vedere se l'ipotesi della contrazione fosse sufficiente a dedurre il principio di relatività. La conclusione cui arrivò dopo una serie di calcoli piuttosto elaborati fu negativa, ma gli consentì di trovare quali condizioni dovessero essere aggiunte per stabilire una completa equivalenza riguardo ai fenomeni elettromagnetici tra un sistema in movimento e l'etere a riposo. Il risultato cui pervenne è d'importanza almeno pari a quella dell'ipotesi della contrazione: in un sistema in moto uniforme è necessario introdurre una nuova misura del tempo. Egli chiamò questo tempo, il cui valore varia da sistema a sistema, "tempo locale". L'ipotesi della contrazione può ora essere espressa più chiaramente: una misura di lunghezza dà risultati differenti se eseguita in un sistema in movimento o nell'etere. Queste due ipotesi stabiliscono che lo spazio e il tempo debbono essere misurati in modo differente a seconda che il sistema sia in moto o a riposo. Lorentz ricavò le leggi di trasformazione per passare da quantità misurate in un sistema ad un altro e dimostrò che tali trasformazioni lasciano invariate le equazioni di campo della sua teoria.

Nella nuova teoria, conformemente ai risultati sperimentali, vale un principio di relatività riferito all'elettrodinamica, secondo cui un osservatore percepisce lo stesso fenomeno indipendentemente dal fatto che il suo sistema sia a riposo nell'etere o si muova di moto rettilineo uniforme. Egli non ha alcun modo di distinguere fra un sistema e un altro, poichè, anche nel caso di corpi che si muovono nell'universo indipendentemente dall'osservatore, non è possibile riconoscere il moto assoluto rispetto all'etere, ma soltanto il moto relativo. Così due osservatori in moto relativo fra di loro, possono a ugual diritto asserire di essere a riposo nell'etere, senza che vi sia alcuna possibilità, nè da un punto di vista sperimentale, nè da un punto di vista teorico, di decidere quale dei due abbia ragione. Queste considerazioni assumono nei confronti del concetto di etere una posizione analoga a quella che il principio di relatività della meccanica classica ha rispetto allo spazio assoluto di Newton. È ovvio quindi che se due osservatori in moto relativo fra loro possono affermare a buon diritto di essere fermi

nell'etere, non vi è ragione di supporre l'esistenza di un simile mezzo!

Il risultato di uno sviluppo rigoroso della teoria dell'etere è dunque la scomparsa di questa stessa ipotesi come concetto fondamentale. Ma questa rinuncia non fu certamente facile, se è vero che lo stesso Lorentz, le cui geniali ipotesi e continue ricerche avevano determinato questa situazione di crisi della teoria, esitò a lungo prima di compiere questo passo. Da questo momento l'etere come sostanza materiale scompare dalla teoria e viene sostituito dal campo elettromagnetico, inteso come un utile strumento matematico per la descrizione dei processi che avvengono nella materia e delle loro relazioni.

CONTATTI DEGLI AUTORI

- Posta elettronica
- ♠ [*gianluca.arrighi@libero.it*](mailto:gianluca.arrighi@libero.it)
 - ♥ [*patriziacaccia@tiscali.it*](mailto:patriziacaccia@tiscali.it)
 - ♣ [*ghioni@collegiosancarlo.it*](mailto:ghioni@collegiosancarlo.it) ; [*ghiberto@tiscali.it*](mailto:ghiberto@tiscali.it)
 - ◇ [*roberto.squellati@tiscali.it*](mailto:roberto.squellati@tiscali.it)